Université Paris-Est Créteil Val-de-Marne — Upec
Faculté des Sciences économiques et de gestion
Licence Économie et Gestion — Première année
Information économie et sociale
François Legendre — Année 2009-2010

Éléments de corrigé de la feuille de route 2

Je me propose de corriger seulement la dernière question, celle relative à l'ajustement de la distribution des salaires par une loi log-normale. Cette loi est caractérisée par deux paramètres, notés μ et σ^2.

X suit une loi log-normale(μ, σ^2) si et seulement si $\ln(X)$ suit une loi normale(μ, σ^2)

où μ est l'espérance de la loi normale et σ^2 sa variance. En retenant des notations mathématiques, on écrira ainsi

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

La simplicité de cette définition est trompeuse. L'espérance et la variance de la loi log-normale ne s'expriment pas immédiatement en fonction de μ et de σ^2. La loi log-normale n'est pas symétrique : elle est notamment caractérisée par des valeurs extrêmes plus fréquentes dans la partie droite de la distribution que dans la partie gauche. On montre que

$$E(X) = \exp\left[\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right] > \exp(\mu)$$

Par exemple, l'espérance d'une log-normale $(0, 1)$ n'est pas égale à 1 mais à $\exp(0 + 1/2) \approx 1{,}65$.

La densité de la loi normale est traditionnellement notée $\phi(\cdot)$.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

La densité de la loi log-normale, notée $f(\cdot)$, s'exprime en fonction de $\phi(\cdot)$. On a

$$f(x) = \frac{1}{x}\phi[\ln(x)] = \frac{1}{x}\frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Enfin, on montre que les paramètres μ et σ^2 s'expriment en fonction de l'espérance et de la variance de la loi log-normale comme suit.

$$\mu = \ln[E(X)] - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{V(X)}{[E(X)]^2}\right)$$

$$\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{V(X)}{[E(X)]^2}\right)$$

Pour ajuster la distribution des salaires, on procède ainsi en quatre étapes.

1. en prenant les salaires moyens dans chaque décile, calcul de l'espérance et de la variance empiriques de la distribution ; ces deux grandeurs sont notées $\widetilde{E}(X)$ et $\widetilde{V}(X)$;
2. en prenant les grandeurs empiriques, calcul des deux paramètres estimés de la loi log-normale ; en notant ces deux paramètres $\widetilde{\mu}$ et $\widetilde{\sigma}^2$, le calcul est le suivant

$$\widetilde{\mu} = \ln[\widetilde{E}(X)] - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\widetilde{V}(X)}{[\widetilde{E}(X)]^2}\right)$$

$$\widetilde{\sigma}^2 = \ln\left(1 + \frac{\widetilde{V}(X)}{[\widetilde{E}(X)]^2}\right)$$

3. en prenant des valeurs régulièrement espacées pour les salaires, calcul de la densité de la distribution en utilisant les deux paramètres estimés ;
4. dessin de la courbe en prenant les valeurs précédemment calculées.

Figure 1: Densité de loi normale (0, 1) et de la loi log-normale (0, 1)