Dérivées composées - I

Soit la fonction $g(\cdot)$ d'une variable. Soit la fonction $f(\cdot)$ d'une variable. La dérivée de la fonction $g[f(x)]$ par rapport à x est

$$f'(x) \times g'[f(x)]$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
g(x) &= \ln(x) \qquad g'(x) = \frac{1}{x} \\
f(x) &= x^2 \qquad f'(x) = 2x \\
g[f(x)] &= \ln(x^2) \\
\Big[g[f(x)]\Big]'_x &= f'(x) \times g'[f(x)] \\
&= 2x \times \frac{1}{x^2} = \frac{2x}{x^2} \\
\Big[\ln(x^2)\Big]'_x &= \frac{2x}{x^2}
\end{aligned}$$

Dérivées composées - II

Soit la fonction $g(\cdot,\cdot)$ de deux variables. Soit la fonction $f(\cdot)$ d'une variable. La dérivée de la fonction $g[x, f(x)]$ par rapport à x est

$$g_1'[x, f(x)] + f'(x) \times g_2'[x, f(x)]$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= x \times y \qquad g_1'(x,y) = y \qquad g_2'(x,y) = x \\
f(x) &= x^2 \qquad f'(x) = 2\,x \\
g[x, f(x)] &= x \times x^2 = x^3 \\
\Big[g[x, f(x)]\Big]_x' &= g_1'[x, f(x)] + f'(x) \times g_2'[x, f(x)] \\
&= x^2 + 2\,x \times x = x^2 + 2\,x^2 = 3\,x^2 \\
\left[x^3\right]_x' &= 3\,x^2
\end{aligned}$$

Théorème des fonctions implicites

Soit la fonction $g(\cdot,\cdot)$ de deux variables. La condition

$$g(x,y) = \text{constante}$$

définit implicitement la fonction $f(\cdot)$

$$y = f(x).$$

La dérivée de la fonction $f(\cdot)$ s'exprime simplement en fonction des dérivées partielles de la fonction $g(\cdot,\cdot)$.
Par définition de $f(\cdot)$, on a

$$g[x, f(x)] = \text{constante}.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned} \left[g(x,f(x)\right]'_x &= [\text{constante}]'_x \\ g'_1(x,y) + f'(x) \times g'_2(x,y) &= 0 \\ f'(x) &= -\frac{g'_1(x,y)}{g'_2(x,y)} \end{aligned}$$

Théorème des fonctions implicites – Exemple

La condition

$$g(x,y) = x \times y = 16$$

définit implicitement la fonction

$$y = f(x) = \frac{16}{x}.$$

$$f'(x) = \left[16\,x^{-1}\right]'_x = 16 \times (-1) \times x^{-1-1} = -16\,x^{-2}.$$

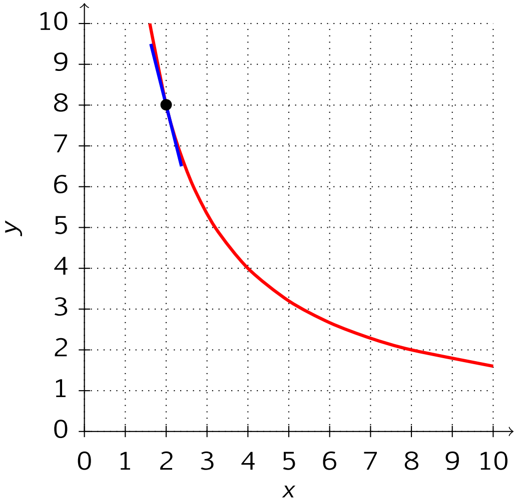
Au point $(x,y) = (2,8)$

$$f'(2) = -16 \times 2^{-2} = -4$$

On peut aussi utiliser

$$f'(2) = -\frac{g'_1(2,8)}{g'_2(2,8)} = -\frac{8}{2} = -4$$

Illustration graphique



Optimum de Pareto de consommation

$$\max_{x_a,y_a,x_b,y_b} u_b(x_b,y_b)$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} x_a + x_b \leq 10 \\ y_a + y_b \leq 20 \\ u_a(x_a,y_a) \geq 5 \end{cases} \qquad y_a = f(x_a)$$

Le programme du planificateur devient

$$\max_{x_a} u_b(10-x_a, 20-f(x_a))$$

La condition du premier ordre est

$$-u'_{b\,1}(x_b^\star, y_b^\star) - f'(x_a^\star) \times u'_{b\,2}(x_b^\star, y_b^\star) = 0$$

Or

$$f'(x_a) = -\frac{u'_{a\,1}(x_a^\star, y_a^\star)}{u'_{a\,2}(x_a^\star, y_a^\star)}$$

L′égalité des taux marginaux de substitution

L′optimum est ainsi caractérisé par l′égalité des taux marginaux de substitution entre les deux individus.

$$\frac{u'_{a\,1}(x_a^\star, y_a^\star)}{u'_{a\,2}(x_a^\star, y_a^\star)} = \frac{u'_{b\,1}(x_b^\star, y_b^\star)}{u'_{b\,2}(x_b^\star, y_b^\star)}$$

L'optimum de PARETO de production

$$\max_{k_x,\ell_x,k_y,\ell_y} y$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} x \leq g(k_x,\ell_x) \\ y \leq h(k_y,\ell_y) \\ k_x + k_y \leq 10 \\ \ell_x + \ell_y \leq 20 \\ x \geq 5 \end{cases}$$

$$\max_{k_x,\ell_x,k_y,\ell_y} h(k_y,\ell_y)$$

$$\text{sous les contraintes} \begin{cases} k_x + k_y \leq 10 \\ \ell_x + \ell_y \leq 20 \\ g(k_x,\ell_x) \geq 5 \end{cases} \qquad \ell_x = f(k_x)$$

Le programme du planificateur devient

$$\max_{k_x} h(10-k_x, 20-f(k_x))$$

La condition du premier ordre est

$$-h_1'(k_y^\star, \ell_y^\star) - f'(k_x^\star) \times h_2'(k_y^\star, \ell_y^\star) = 0$$

Or

$$f'(k_x^\star) = -\frac{g_1'(k_x^\star, \ell_x^\star)}{g_2'(k_x^\star, \ell_x^\star)}$$

L′égalité des taux marginaux de transformation

L′optimum est ainsi caractérisé par l′égalité des taux marginaux de transformation entre les deux secteurs

$$\frac{g_1'(k_x^\star, \ell_x^\star)}{g_2'(k_x^\star, \ell_x^\star)} = \frac{h_1'(k_y^\star, \ell_y^\star)}{h_2'(k_y^\star, \ell_y^\star)}$$