Initiation à l'économétrie des données de panel

F. Legendre

Centre d'Études de l'Emploi

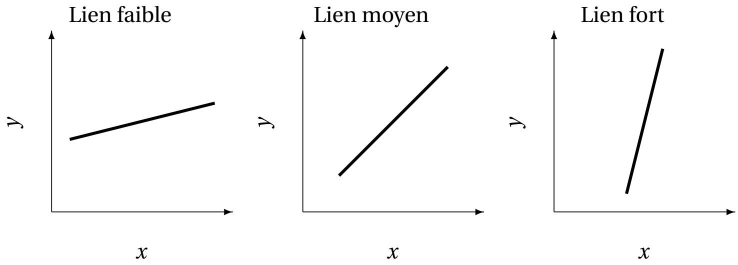
Année universitaire 2007-2008
Université Paris-XII — Faculté de Sciences économiques et de Gestion
Master *Économie appliquée* — Séminaire « Méthodes économétriques »

Organisation de la présentation

- Trois fondamentaux de l'économétrie
- Les données de panel
- L'hypothèse d'erreur composée

Fondamental 1 – Quantifier une relation causale

$$y = ax + b$$



$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\text{Variation de l'effet}}{\text{Variation de la cause}}$$

Fondamental 1 – Quantifier une relation causale

$$y_i = ax_i + b + u_i \qquad i = 1, \dots, N$$

$$\hat{a} = \frac{\mathrm{Covar}(x,y)}{\mathrm{Var}(x)} = \sum_i \pi_i \frac{y_i - \overline{y}}{x_i - \overline{x}} \quad \text{avec} \quad \pi_i > 0 \quad \text{et} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2} = \sum_i \frac{(x_i - \overline{x})^2}{\sum_j (x_j - \overline{x})^2} \frac{y_i - \overline{y}}{x_i - \overline{x}}$$

Fondamental 2 – Le théorème de Frish-Waugh

$$(1) \quad \underline{y} = a\,\underline{x} + b\,\underline{z} + \underline{u}$$

$$(a) \quad \underline{y} = \widehat{a}\,\underline{x} + \widehat{b}\,\underline{z} + \underline{\widehat{u}}$$

$$(b) \quad p_z(\underline{y}) = p_z(\widehat{a}\,\underline{x} + \widehat{b}\,\underline{z} + \underline{\widehat{u}}) = \widehat{a}\,p_z(\underline{x}) + \widehat{b}\,p_z(\underline{z}) + p_z(\underline{\widehat{u}})$$

$$\longrightarrow \quad p_z(\underline{y}) = \underline{\widehat{y}}_z$$

$$\longrightarrow \quad p_z(\underline{x}) = \underline{\widehat{x}}_z$$

$$\longrightarrow \quad p_z(\underline{z}) = \underline{z}$$

$$\longrightarrow \quad p_z(\underline{\widehat{u}}) = \underline{0}$$

$$(a)-(b) \quad (\underline{y} - \underline{\widehat{y}}_z) = \widehat{a}(\underline{x} - \underline{\widehat{x}}_z) + \underline{\widehat{u}}$$

$$(2) \quad \underline{\widetilde{y}} = a\,\underline{\widetilde{x}} + \underline{u} \quad \text{avec} \quad \underline{\widetilde{y}} = \underline{y} - \underline{\widehat{y}}_z \quad \text{et} \quad \underline{\widetilde{x}} = \underline{x} - \underline{\widehat{x}}_z$$

Fondamental 2 – Le théorème de Frish-Waugh : l'exemple standard

$$(1)\quad \underline{y} = a\,\underline{x} + b\,\underline{1} + \underline{u}$$

$$(2)\quad \underline{\tilde{y}} = a\,\underline{\tilde{x}} + \underline{u} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\tilde{y}} = \underline{y} - \overline{y}\,\underline{1} \qquad \text{et} \qquad \underline{\tilde{x}} = \underline{x} - \overline{x}\,\underline{1}$$

$$\hat{a} = (\underline{\tilde{x}}'\underline{\tilde{x}})^{-1}\underline{\tilde{x}}'\underline{\tilde{y}} = \frac{\underline{\tilde{x}}'\underline{\tilde{y}}}{\underline{\tilde{x}}'\underline{\tilde{x}}} = \frac{\sum_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sum_i (x_i - \overline{x})^2}$$

Fondamental 3 – Que faire si $\mathrm{V}(\underline{u}) \neq \sigma^2 I_N$?

$$\text{si } \mathrm{V}(\underline{u}) \neq \sigma^2 I_N \quad \text{alors} \quad \mathrm{V}(\widehat{\underline{a}}) \neq (X'X)^{-1}\sigma^2$$

Deux conséquences

- $\widehat{\underline{a}}$ n'est plus le meilleur
- $\mathrm{V}(\widehat{\underline{a}})$ est « mal » calculé par l'ordinateur : les tests sont dénués de sens

Il faut prendre en compte $\mathrm{V}(\underline{u}) \neq \sigma^2 I_N$ pas tellement pour le gain en efficacité mais pour (re)donner un sens aux tests

Les données de panel

- La mise à disposition de données individuelles et leurs limites
- La spécificité des données de panel
  - Données individuelles temporelles
  - Donnée à double indice
- Les différents types de données de panel

Philosophie de comptoir

- Aristote – Il n'y a pas de science du particulier : il n'y a de science que du général
- Anonyme – Il n'est de connaissance que procédant de la comparaison

L'hypothèse d'erreur composée, Balestra et Nerlove 1966

Un modèle linéaire…	$\underline{y} = X\underline{a} + \underline{u}$
…mais le terme d'erreur est	$u_{it} = \mu_i + v_{it}$
Les observations sont rangées par individu	$\underline{z} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \vdots \\ \underline{z}_i \\ \vdots \\ \underline{z}_N \end{pmatrix}$

L'hypothèse d'erreur composée

On retient les hypothèses habituelles d'absence de corrélation entre les observations et d'homocédasticité

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mu_i) = 0 & \quad \forall\ i \\
\mathrm{E}(v_{it}) = 0 & \quad \forall\ i,t \\
\mathrm{V}(\mu_i) = \sigma^2_\mu & \quad \forall\ i \\
\mathrm{V}(v_{it}) = \sigma^2_v & \quad \forall\ i,t \\
\mathrm{Cov}(\mu_i, \mu_j) = 0 & \quad \forall\ i \neq j \\
\mathrm{Cov}(v_{it}, v_{j\tau}) = 0 & \quad \forall\ i \neq j, t \neq \tau \\
\mathrm{Cov}(\mu_i, v_{jt}) = 0 & \quad \forall\ i,j,t
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{V}(\underline{u}_i) = \Sigma \quad \forall\ i \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(\underline{u}_i \underline{u}_j') = 0_T \quad \forall\ i \neq j$$

Forme de la matrice de variance-covariance de $\underline{u}$

La matrice de variance-covariance est bloc-diagonale

$$V(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma & 0_T & \cdots & 0_T \\ 0_T & \Sigma & \cdots & 0_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_T & 0_T & \cdots & \Sigma \end{pmatrix} = I_N \otimes \Sigma$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 + \sigma_v^2 \end{pmatrix} = \sigma_v^2 W_T + (T\sigma_\mu^2 + \sigma_v^2) B_T$$

Les matrices W et B

$$
\begin{aligned}
W_T &= I_T - \frac{1}{T} J_T \\
B_T &= \frac{1}{T} J_T \\
J_T &= \underline{1}_T \underline{1}'_T \\
\mathrm{V}(\underline{u}) &= \sigma_v^2 W + (T\sigma_\mu^2 + \sigma_v^2) B \\
W &= I_N \otimes W_T \\
B &= I_N \otimes B_T
\end{aligned}
$$

$W\underline{z}$ est de terme $z_{it} - \overline{z}_i$

$B\underline{z}$ est de terme $\overline{z}_i$

$$W^2 = W, \quad W' = W, \quad B^2 = B, \quad B' = B,$$

$$W + B = I_{NT} \quad \text{et} \quad W'B = 0_{NT}$$

La décomposition de la variance

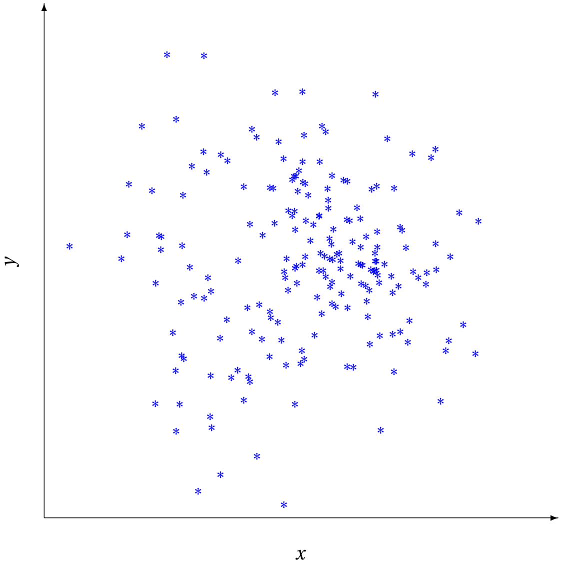
$$\underline{z} = I_{NT}\,\underline{z} = (W+B)\underline{z} = W\underline{z} + B\underline{z}$$

$$\underline{z}'\underline{z} = \underline{z}'W\underline{z} + \underline{z}'B\underline{z}$$

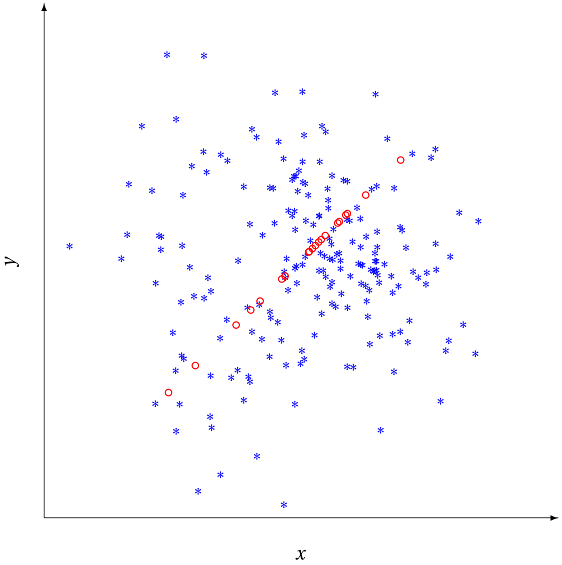
$$\frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} z_{it}^2}{NT} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(z_{it}-\overline{z}_i)^2}{NT} + \frac{\sum_{i=1}^{N}\overline{z}_i^2}{N}$$

$$\text{Variance totale} = \text{Variance intra} + \text{Variance inter}$$

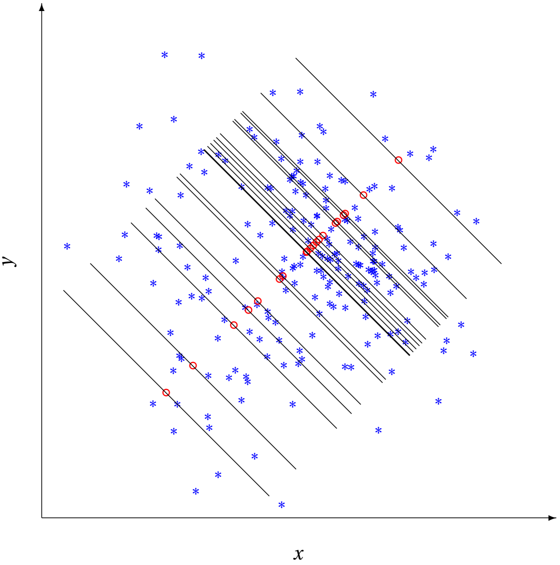
Un nuage de points qui semblent indépendants...



. . . mais une corrélation inter-individuelle positive et. . .



... une corrélation intra-individuelle négative



L'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\mathcal{L}(\underline{a}, \sigma_\mu^2, \sigma_\nu^2) = (2\pi)^{-NT/2} |\Omega|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y} - X\underline{a})' \Omega^{-1} (\underline{y} - X\underline{a}) \right\}$$

$$\Omega = \lambda_w W + \lambda_b B$$

$$\lambda_w = \sigma_\nu^2$$

$$\lambda_b = (T\sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2)$$

$$|\Omega| = \lambda_w^{N(T-1)} \lambda_b^N$$

$$\Omega^{-1} = \lambda_w^{-1} W + \lambda_b^{-1} B$$

$$\ln \mathcal{L}(\underline{a}, \lambda_w, \lambda_b) \simeq -\frac{1}{2} N(T-1) \ln \lambda_w - \frac{1}{2} N \ln \lambda_b - \frac{1}{2\lambda_w} (\underline{y} - X\underline{a})' W (\underline{y} - X\underline{a}) - \frac{1}{2\lambda_b} (\underline{y} - X\underline{a})' B (\underline{y} - X\underline{a})$$

Le système non linéaire vérifié par l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\begin{aligned}
\widehat{\underline{a}}_{MV} &= \left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_{w\,MV}} X'WX + \frac{1}{\widehat{\lambda}_{b\,MV}} X'BX \right)^{-1} \\
&\quad \left(\frac{1}{\widehat{\lambda}_{w\,MV}} X'W\underline{y} + \frac{1}{\widehat{\lambda}_{b\,MV}} X'B\underline{y} \right) \\
\widehat{\lambda}_{w\,MV} &= \frac{(\underline{y} - X\widehat{\underline{a}}_{MV})'W(\underline{y} - X\widehat{\underline{a}}_{MV})}{N(T-1)} \\
\widehat{\lambda}_{b\,MV} &= \frac{(\underline{y} - X\widehat{\underline{a}}_{MV})'B(\underline{y} - X\widehat{\underline{a}}_{MV})}{N}
\end{aligned}$$

L'estimateur des moindres carrés généralisés

$$
\begin{aligned}
\underline{\widehat{a}}_{MCG} &= \left(X'\Omega^{-1}X\right)^{-1} X'\Omega^{-1}\underline{y} \\
\Omega^{-1} &= \lambda_w^{-1} W + \lambda_b^{-1} B \\
\underline{\widehat{a}}_{MCG} &= [X'(W+\theta B)X]^{-1} X'(W+\theta B)\underline{y} \\
\theta &= \lambda_w / \lambda_b \\
\underline{\widehat{a}}_{MCG} &= (X^{\star\prime}X^{\star})^{-1} X^{\star\prime}\underline{y}^{\star} \\
z_{it}^{\star} &= (z_{it} - \overline{z}_i) + \sqrt{\theta}\,\overline{z}_i = z_{it} - (1-\sqrt{\theta})\overline{z}_i
\end{aligned}
$$

$$\lambda_w = \sigma_v^2 \quad \text{et} \quad \lambda_b = (T\sigma_\mu^2 + \sigma_v^2)$$

$$\theta = 0 \iff \sigma_v^2 = 0$$

$$\theta = 1 \iff \sigma_v^2 \to \infty$$

L'estimateur des moindres carrés quasi généralisés

$$\underline{\widehat{a}}_{MCQG} = (\widehat{X}^{\star\prime}\widehat{X}^{\star})^{-1}\widehat{X}^{\star\prime}\underline{\widehat{y}}^{\star}$$

$$\widehat{z}_{it}^{\star} = (z_{it} - \overline{z}_i) + \sqrt{\widehat{\theta}}\,\overline{z}_i = z_{it} - (1 - \sqrt{\widehat{\theta}})\overline{z}_i$$

$$\widehat{\theta} = \widehat{\lambda}_w / \widehat{\lambda}_b = \frac{SCR_W/(NT - N - k)}{SCR_B/(N-k)}$$

L'hypothèse d'effet fixe individuel

$$y_{it} = a\,x_{it} + b_i + u_{it} \qquad N+2 \text{ paramètres : } a, \text{ les } b_i \text{ et } \sigma_u$$

$$\underline{y} = a\,\underline{x} + b_1\,\underline{e}_1 + b_2\,\underline{e}_2 + \cdots + b_N\,\underline{e}_N + \underline{u}$$

$$\underline{\widetilde{y}} = a\,\underline{\widetilde{x}} + \underline{u}$$

$$\widetilde{z}_{it} = z_{it} - \overline{z}_i$$

L'estimation dans la dimension inter-individuelle

$$\overline{y}_i = a\overline{x}_i + b + v_i$$

L'exogénéité de l'effet aléatoire

$$y_{it} = a\,x_{it} + b + c\,\overline{x}_i + u_{it}$$
$$u_{it} = \mu_i + v_{it}$$