F.Legendre@univ-paris12.fr – http://fj.legendre.free.fr

TD n°4

I – Agrégation de processus

Soient deux processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$ définis respectivement par les deux équations suivantes.

$$\begin{aligned}(1-a\mathrm{L})x_t &= \varepsilon_t \qquad |a|<1\\ (1-b\mathrm{L})y_t &= \eta_t \qquad |b|<1\end{aligned}$$

où ε et η sont sans corrélation.

1. – Soit le processus $\{u_t\}$ défini comme suit.

$$u_t = (1-b\mathrm{L})\varepsilon_t + (1-a\mathrm{L})\eta_t$$

Déterminer le corrélogramme de u_t. En déduire que u_t est au plus un MA(1) (il est inutile d'expliciter précisément u_t).

2. – Montrer que le processus $z_t = x_t + y_t$ (qui résulte donc de l'agrégation des processus $\{x_t\}$ et $\{y_t\}$) suit le processus ARMA(2,1) suivant.

$$(1-\phi_1\mathrm{L}-\phi_2\mathrm{L}^2)z_t = (1-\theta_1\mathrm{L})v_t$$

Déterminer ϕ_1 et ϕ_2.

II – L'algorithme de minimisation numérique de NEWTON

Soit la fonction $f(\cdot)$ continue et deux fois dérivable. On recherche numériquement un minimum de cette fonction en partant du développement de TAYLOR à l'ordre deux de cette fonction au voisinage de x_0.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2$$

1. – Trouver la condition du premier ordre de minimisation de $f(\cdot)$ en utilisant cette approximation.

2. – Déduire de cette condition une équation de récurrence dont le point fixe constituerait un minimum de cette fonction.

3. – La fonction $f(\cdot)$ est de la forme $f(x) = (x-2)^2$. En appliquant l'algorithme précédent, trouver numériquement le minimum de cette fonction, en prenant comme point de départ $x_0 = 1$. Que peut-on constater ?

4. – La fonction $f(\cdot)$ est de la forme $f(x) = (x-2)^4$. En appliquant l'algorithme précédent, trouver numériquement le minimum de cette fonction, en prenant comme point de départ $x_0 = 1$. Que peut-on constater ?