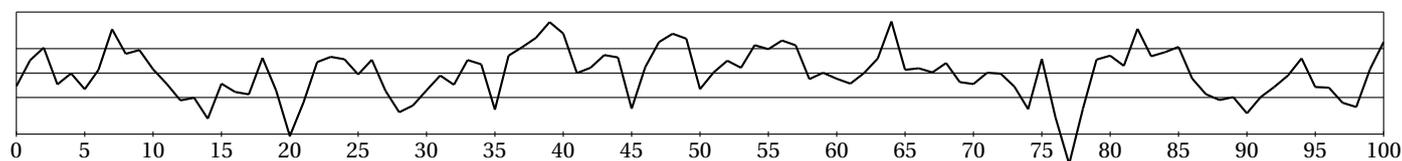


Interrogation écrite n°2

I – L'œil de l'expert

Soit une réalisation (partielle) d'un processus MA(1) dont la représentation graphique figure ci-après.



1. – Le coefficient d'autocorrélation d'ordre 1, ρ_1 , du processus est-il, à votre avis, négatif ou positif?
2. – On vous propose de choisir entre l'un des deux modèles suivants.

$$(a) \quad x_t = \varepsilon_t + 0,6\varepsilon_{t-1} \qquad (b) \quad x_t = \varepsilon_t - 0,6\varepsilon_{t-1}$$

Faut-il *a priori* retenir le modèle (a) ou le modèle (b)?

II – Processus MA(2)

Soit le processus $\{x_t\}$ MA(2) défini comme suit.

$$x_t = \varepsilon_t - 0,25\varepsilon_{t-2}$$

où ε_t est un bruit blanc.

1. – Ce processus est-il sous une forme canonique?
2. – Déterminer le covariogramme et le corrélogramme de ce processus.
3. – Donner le programme SAS qui permettrait de simuler une réalisation partielle de ce processus.

III – Estimation préliminaire et prévision d'un AR(1)

Soit le processus $\{x_t\}$ AR(1) défini par l'équation suivante.

$$x_t = \phi x_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\phi| < 1$$

où ε_t est un bruit blanc de variance σ_ε^2 .

1. – Donner, pour ce processus, l'équation de YULE-WALKER qui relie ρ_1 et ρ_0 .
2. – Montrer que cette équation conduit à un estimateur de ϕ , noté $\tilde{\phi}$, qui est approximativement le même que l'estimateur des MCO, noté $\hat{\beta}$, du modèle $x_t = \beta x_{t-1} + u_t \quad t = 2, \dots, T$.
3. – Trouver la variance asymptotique de $\tilde{\phi}$.
4. – Déterminer la forme de la prévision réalisée en T pour l'horizon k – notée \hat{x}_{T+k}^T – avec

$$\hat{x}_{T+k}^T = E(x_{T+k} | \Omega_T) \quad k = 1, 2, \dots$$

où Ω_T est l'ensemble d'information disponible au temps T. L'observation qui se réalise en T appartient à cet ensemble : $\Omega_T = \{x_T, x_{T-1}, \dots, x_1\}$.

5. – Déterminer l'erreur de prévision à l'horizon k notée $\hat{\varepsilon}_{T+k}^T$; c'est-à-dire

$$\hat{\varepsilon}_{T+k}^T = x_{T+k} - \hat{x}_{T+k}^T.$$

En déduire la variance de cette erreur de prévision.