UNIVERSITÉ PARIS-XII — FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION
Licence *Économie et Gestion* — Mention *Sciences économiques*
Cours de Micro-économie approfondie et Choix intertemporels 2006–07
François LEGENDRE — `F.Legendre@univ-paris12.fr` — `http://fj.legendre.free.fr`

Document de cours n°2

Ce document a pour simple objet de détailler la forme des fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante, dites CES – pour Constant Elasticity of Substitution.

1 Fonction d'utilité de type CES

Nous avons l'habitude d'utiliser des fonctions d'utilité de type COBB-DOUGLAS, de forme suivante, dans un monde à deux biens :

$$u(x_1,x_2)=x_1^a x_2^b \quad \text{avec} \quad a,b>0$$

On sait que la même relation de préférence pourrait être représentée par la fonction d'utilité :

$$v(x_1,x_2)=x_1^{a'} x_2^{1-a'} \quad \text{avec} \quad a'=a/(a+b)$$

où a' est compris entre 0 et 1 et s'interprète comme le poids relatif que le consommateur accorde au premier bien.

Ce type de fonction d'utilité s'avère très restrictif. On sait que les demandes marshalliennes sont

$$x_1^\star=a'\mathrm{R}/p_1 \quad \text{et} \quad x_2^\star=(1-a')\mathrm{R}/p_2$$

si bien que les parts budgétaires des deux biens sont constantes – respectivement a' et $1-a'$. L'élasticité des deux demandes par rapport à leur propre prix est égale à -1 ; l'élasticité croisée par rapport à l'autre prix est nulle et, enfin, l'élasticité par rapport au revenu est égale à 1. De plus, l'élasticité de substitution entre les deux biens est égale à 1. C'est cette dernière restriction que l'on voudrait lever.

Du programme du consommateur quand ses préférences sont représentées par une fonction d'utilité de type COBB-DOUGLAS, on tire la condition suivante (avec les notations précédentes) :

$$\frac{a\,x_1^{-1}}{b\,x_2^{-1}}=\frac{p_1}{p_2} \quad \text{soit} \quad \frac{x_1}{x_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1}\frac{a}{b}$$

La première expression s'interprète comme « le *TM* est égal au rapport des prix ». L'on voudrait généraliser pour une élasticité de substitution quelconque (notée σ avec $\sigma \geq 0$) ; l'on veut donc avoir :

$$\frac{x_1}{x_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma}\left(\frac{a}{b}\right)^{\sigma} \quad \text{soit} \quad \frac{a\,x_1^{-1/\sigma}}{b\,x_2^{-1/\sigma}}=\frac{p_1}{p_2}$$

En intégrant cette dernière expression, la fonction d'utilité pourrait donc être de la forme suivante :

$$a\,x_1^{1-1/\sigma}+b\,x_2^{1-1/\sigma} \quad \texttt{faux!}$$

Mais cette forme est erronée car $1-1/\sigma$ n'est pas nécessairement positif (or, une fonction d'utilité doit être croissante en ses arguments). Plus précisément, $1-1/\sigma$ est du signe de $\sigma-1$. On peut donc réécrire la fonction d'utilité, par exemple :

$$\text{soit} \quad \frac{a\,x_1^{1-1/\sigma}+b\,x_2^{1-1/\sigma}}{\sigma-1} \quad \text{soit} \quad \left(a\,x_1^{(\sigma-1)/\sigma}+b\,x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}$$

Dans la seconde forme, la fonction d'utilité est homogène de degré 1 en ses arguments ; ceci n'est pas indispensable (l'utilité n'est *a priori* que cardinale).

2 Interprétation économique des demandes marshalliennes issues d'une fonction d'utilité CES

L'interprétation économique des fonctions de demande du consommateur quand la fonction d'utilité est de type CES est particulièrement intéressante. Pour résoudre le programme du consommateur, en supposant une solution intérieure, l'on dispose des deux conditions suivantes :

$$\frac{x_1}{x_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-\sigma}\left(\frac{a}{b}\right)^{\sigma} \quad \text{et} \quad p_1x_1+p_2x_2=\mathrm{R}$$

La seconde condition dit « le revenu est totalement dépensé ». En résolvant, on trouve l'expression suivante, en partant de la contrainte budgétaire et en remplaçant x_2/x_1 par son expression obtenue depuis la première condition – expression peu sympathique :

$$x_1=\mathrm{R}/\left[p_1+p_2(p_1/p_2)^{\sigma}(a/b)^{-\sigma}\right]$$

Cette dernière expression se doit d'être interprétée. Le dénominateur se réécrit comme $p_1+a^{-\sigma}b^{\sigma}p1^{\sigma}p_2^{1-\sigma}=a^{-\sigma}p_1^{\sigma}(a^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+b^{\sigma}p_2^{1-\sigma})$. La demande marshallienne pourrait donc s'exprimer comme suit :

$$x_1=a^{\sigma}p_1^{-\sigma}\mathrm{R}/\left[a^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+b^{\sigma}p_2^{1-\sigma}\right]$$

ce qui est déjà plus sympathique. Mais une autre piste est envisageable. En définissant la quantité P :

$$\mathrm{P}=\left(a^{\sigma}p_1^{1-\sigma}+b^{\sigma}p_2^{1-\sigma}\right)^{1/(1-\sigma)}$$

qui est homogène de degré 1 en p_1 et p_2, la fonction de demande s'écrit maintenant :

$$x_1=a^{\sigma}\left(\frac{p_1}{\mathrm{P}}\right)^{-\sigma}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}}$$

P s'interprète donc comme une définition du niveau général des prix compatible avec la fonction d'utilité retenue. Le terme $(p_1/\mathrm{P})^{-\sigma}$ retrace (en première approximation) l'effet de substitution ; le terme R/P (en première approximation) l'effet de revenu. Quand la fonction d'utilité est de type COBB-DOUGLAS, il faudrait en fait écrire :

$$x_1=a'\left(\frac{p_1}{\mathrm{P}}\right)^{-1}\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{P}} \quad \text{avec} \quad \mathrm{P}=p_1^{a'}p_2^{1-a'}$$