

### Interrogation écrite n°1

On dispose de deux variables (fictives),  $y$  et  $x$ , relatives à deux individus et à deux périodes. Ces deux individus sont repérés par l'indice  $i$ ,  $i = 1, 2$ . Les deux périodes sont repérées par l'indice  $t$ ,  $t = 1, 2$ . La table SAS qui contient ces données est la suivante :

i	t	y	x
1	1	2	8
1	2	4	2
2	1	3	4
2	2	3	10

1) On ajuste le modèle suivant :

$$(1) \quad y_{it} = \alpha x_{it} + \beta_t + u_{it} \quad i = 1, 2; \quad t = 1, 2.$$

Mettre le modèle sous la forme matricielle  $\underline{y} = \underline{X}\underline{a} + \underline{u}$  en détaillant les éléments des vecteurs  $\underline{y}$ ,  $\underline{a}$  et  $\underline{u}$  et les éléments de la matrice  $\underline{X}$ .

2) Montrer que la matrice des variables explicatives se met sous la forme suivante :

$$\underline{X} = (\underline{x} \mid \underline{c} \otimes \underline{D})$$

où  $\underline{c}$  est un vecteur de taille  $N \times 1$  et  $\underline{D}$  une matrice de taille  $T \times T$ . Expliciter les termes  $\underline{c}$  et  $\underline{D}$ .

3) Soit  $\underline{P}$  la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice  $\underline{e}_N \otimes \underline{I}_T$ . Trouver la forme de  $\underline{P}$ .

4) Soit  $\underline{Q}$  la matrice égale à  $\underline{I}_{NT} - \underline{P}$ . Montrer que  $\underline{Q}$  est symétrique et idempotente. Quelle interprétation faut-il alors donner à la matrice  $\underline{Q}$  ?

5) Soit le modèle

$$(2) \quad \underline{Qy} = \underline{Qx}\alpha + \underline{Qu}$$

et soit  $\tilde{\alpha}$  l'estimateur des MCO de ce modèle :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\underline{x}'\underline{Qy}}{\underline{x}'\underline{Qx}}$$

Montrer que  $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$  où  $\hat{\alpha}$  est l'estimateur des MCO du coefficient  $\alpha$  dans le modèle (1).

6) Calculer, numériquement, les vecteurs  $\underline{Qy}$  et  $\underline{Qx}$ . Calculer, numériquement,  $\hat{\alpha}$ .

7) Soit le fragment de programme SAS suivant

```

1  DATA table ;
2  INPUT i t y x ;
3  t1 = t EQ 1 ;
4  t2 = t EQ 2 ;
5  CARDS ;
6  1 1 2 8
7  1 2 4 2
8  2 1 3 4
9  2 2 3 10
10 RUN ;
    
```

Expliquer, précisément et clairement, l'objet de ce fragment de programme. Donner le contenu de la table `table`.

8) Soit le fragment de programme SAS suivant

```

11 PROC reg DATA = table ;
12 MODEL y = x t1 t2 / NOINT ;
13 RUN ;
    
```

Expliquer, précisément et clairement, l'objet de ce fragment de programme.

9) Soit le fragment de programme SAS suivant

```

14 PROC reg DATA = table NOPRINT ;
15 MODEL y = t1 t2 / NOINT ;
16 OUTPUT OUT = yTable R = qy ;
17 MODEL x = t1 t2 / NOINT ;
18 OUTPUT OUT = xTable R = qx ;
19 RUN ;
20 DATA final ;
21 MERGE yTable xTable ;
22 RUN ;
23 PROC reg DATA = final ;
24 MODEL qy = qx / NOINT ;
25 RUN ;
    
```

Expliquer, précisément et clairement, l'objet de ce fragment de programme. Donner le contenu de la table `final`.