Université PARIS-XII — Faculté de Sciences économiques et de gestion
Master *Sciences économiques*
Mention *Économie quantitative et expertise internationale*
Économétrie III — *F. LEGENDRE* — année universitaire 2005-06

Examen mai

1 L'hypothèse d'erreurs deux fois composées

Soit le modèle à double indice suivant :

$$y_{it} = \alpha x_{it} + u_{it} \quad i = 1, \cdots, \mathrm{N} \;\; t = 1, \cdots, \mathrm{T}$$

où l'on adopte l'hypothèse d'erreurs deux fois composées :

$$u_{it} = \mu_i + \delta_t + v_{it}$$

μ_i est l'effet aléatoire individuel, δ_t l'effet aléatoire temporel et v_{it} le « vrai » terme résiduel. On retient les hypothèses habituelles sur les termes aléatoires μ_i, δ_t et v_{it}, en supposant qu'ils sont identiquement et indépendamment distribués. On suppose de plus que ces trois distributions sont indépendantes entre elles. Enfin, on note σ^2_μ, σ^2_δ et σ^2_v les variances des termes, respectivement, μ_i, δ_t et v_{it}.

1) Trouver $\mathrm{V}(u_{it})$, $\mathrm{Cov}(u_{it}, u_{it'})$, $\mathrm{Cov}(u_{it}, u_{i't})$ et $\mathrm{Cov}(u_{it}, u_{i't'})$ où $t \neq t'$ et $i \neq i'$.

2) En prenant $\mathrm{N} = 3$ et $\mathrm{T} = 2$, écrire explicitement la matrice $\mathrm{V}(\underline{u})$.

3) Soit les quatre matrices suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} &= \frac{1}{\mathrm{NT}} \underline{e}_{\mathrm{NT}} \underline{e}'_{\mathrm{NT}} \\
\mathrm{W} &= \mathrm{I}_{\mathrm{NT}} - \frac{1}{\mathrm{T}} \mathrm{I}_{\mathrm{N}} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}} \underline{e}'_{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{N}} \underline{e}_{\mathrm{N}} \underline{e}'_{\mathrm{N}} \otimes \mathrm{I}_{\mathrm{T}} + \frac{1}{\mathrm{NT}} \underline{e}_{\mathrm{NT}} \underline{e}'_{\mathrm{NT}} \\
\mathrm{B}^{\mathrm{I}} &= \frac{1}{\mathrm{T}} \mathrm{I}_{\mathrm{N}} \otimes \underline{e}_{\mathrm{T}} \underline{e}'_{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{NT}} \underline{e}_{\mathrm{NT}} \underline{e}'_{\mathrm{NT}} \\
\mathrm{B}^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{\mathrm{N}} \underline{e}_{\mathrm{N}} \underline{e}'_{\mathrm{N}} \otimes \mathrm{I}_{\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{NT}} \underline{e}_{\mathrm{NT}} \underline{e}'_{\mathrm{NT}}
\end{aligned}$$

où $\underline{e}_{\mathrm{NT}}$ avec le vecteur de taille $\mathrm{NT} \times 1$ constitué de 1. En prenant $\mathrm{N} = 3$ et $\mathrm{T} = 2$, écrire explicitement ces quatre matrices. Montrer que ces matrices sont toutes symétriques et idempotentes. Donner l'interprétation de ces quatre matrices en précisant la transformation à laquelle chacune correspond. Par exemple, si le vecteur $\underline{z}$ est de terme z_{it}, quel est le terme du vecteur $\mathrm{W}\underline{z}$?

4) Montrer que la matrice $\mathrm{V}(\underline{u})$ s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathrm{V}(\underline{u}) = \lambda_1 \mathrm{W} + \lambda_2 \mathrm{B}^{\mathrm{I}} + \lambda_3 \mathrm{B}^{\mathrm{T}} + \lambda_4 \mathrm{G}$$

en donnant l'expression, en fonction de σ^2_μ, σ^2_δ et σ^2_v, de λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4.

5) Expliquer l'intérêt d'une telle décomposition de la matrice $\mathrm{V}(\underline{u})$.

2 Un modèle *logit* particulier

Dans la fiche de travail n°7, le modèle *logit* suivant est proposé :

$$y^\star_i = \alpha x_i + u_i \quad i = 1, \ldots, \mathrm{N} \quad \text{et} \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y^\star_i \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y^\star_i < 0 \end{cases}$$

où $y^\star_i$ est la variable latente non observable et où u_i suit une loi logistique « standard ». Il était alors montré que la log-vraisemblance de l'échantillon est de la forme :

$$f(\alpha) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \{ y_i \ln[\Lambda(\alpha x_i)] + (1 - y_i) \ln[1 - \Lambda(\alpha x_i)] \}$$

et que la dérivée de la log-vraisemblance est égale à

$$f'(\alpha) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} [y_i - \Lambda(\alpha x_i)] x_i$$

Soit maintenant le modèle *logit*, qui ne comporte comme variable explicative que la constante

$$y^\star_i = \alpha + u_i \quad i = 1, \ldots, \mathrm{N} \quad \text{et} \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y^\star_i \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y^\star_i < 0 \end{cases}$$

1) Trouver, au cas de ce modèle, l'expression de la dérivée de la log-vraisemblance.

2) Montrer que la condition du premier ordre conduit à une expression très simple de α en fonction de $\overline{y}$ où $\overline{y}$ est la moyenne empirique de y.

3) En déduire que la probabilité estimée de l'évènement $y_i = 1$ est égale à la proportion observée de l'évènement dans l'échantillon.

3 Test de l'effet fixe individuel

Ci-après figurent les sorties SAS des estimations des deux modèles suivants

$$\begin{aligned}
dq_{it} &= \alpha dk_{it} + \beta d\ell_{it} + \gamma + u_{it} \quad i = 1, \cdots, \mathrm{N} \;\; t = 1, \cdots, \mathrm{T} \qquad (1) \\
dq_{it} &= \alpha dk_{it} + \beta d\ell_{it} + \gamma_i + u_{it} \quad i = 1, \cdots, \mathrm{N} \;\; t = 1, \cdots, \mathrm{T} \qquad (2)
\end{aligned}$$

où le deuxième modèle est estimé en utilisant la transformation de FRISCH–WAUGH et où $\mathrm{N} = 13$.

1) Faire le test d'absence d'un effet fixe individuel dans le modèle (2) en

1. précisant l'hypothèse testée ;
2. spécifiant la statistique utilisée et sa loi sous l'hypothèse de base ;
3. établissant la règle de décision ;
4. réalisant effectivement le test à partir des sorties de SAS.

```
                         The REG Procedure
                          Model: MODEL1
                     Dependent Variable: dlq

              Number of Observations Read         169
              Number of Observations Used         169


                      Analysis of Variance

                               Sum of          Mean
Source               DF       Squares        Square    F Value    Pr > F

Model                 2       0.02474       0.01237       8.08    0.0004
Error               166       0.25414       0.00153
Corrected Total     168       0.27888


           Root MSE              0.03913    R-Square     0.0887
           Dependent Mean        0.01535    Adj R-Sq     0.0777
           Coeff Var           254.83162


                        Parameter Estimates

                      Parameter       Standard
     Variable     DF   Estimate          Error    t Value    Pr > |t|

     Intercept     1    0.00862        0.00572       1.51      0.1334
     dlk           1    0.20175        0.13694       1.47      0.1426
     dll           1    0.42987        0.12042       3.57      0.0005
```

```
                         The REG Procedure
                          Model: MODEL2
                     Dependent Variable: dlqi

              Number of Observations Read         169
              Number of Observations Used         169


      NOTE: No intercept in model. R-Square is redefined.

                      Analysis of Variance

                                 Sum of          Mean
Source                 DF       Squares        Square    F Value    Pr > F

Model                   2       0.03763       0.01881      15.20    <.0001
Error                 167       0.20669       0.00124
Uncorrected Total     169       0.24432


             Root MSE               0.03518    R-Square     0.1540
             Dependent Mean     3.90056E-19    Adj R-Sq     0.1439
             Coeff Var          9.019395E18


                        Parameter Estimates

                        Parameter       Standard
     Variable     DF     Estimate          Error    t Value    Pr > |t|

     dlki          1      0.22510        0.14143       1.59      0.1134
     dlli          1      0.71842        0.13540       5.31      <.0001
```