

TD n°1

1 Quelques calculs simples à faire à la main

On dispose de deux variables (fictives), y et x , relatives à deux individus et à deux périodes. Ces deux individus sont repérés par l'indice i , $i = 1, 2$. Les deux périodes sont repérées par l'indice t , $t = 1, 2$. La table SAS qui contient ces données est la suivante :

i	t	y	x
1	1	2	8
1	2	3	4
2	1	4	2
2	2	3	10

1) Donner le texte de l'étape DATA qui permet, sous SAS, d'obtenir la table ci-avant.

2) On ajuste le modèle suivant :

$$(1) \quad y_{it} = \alpha_1 x_{it} + \beta_1 + u_{1it} \quad i = 1, 2; t = 1, 2.$$

Mettre le modèle sous la forme matricielle $\underline{y} = X_1 \underline{a}_1 + \underline{u}_1$ en détaillant les éléments des vecteurs \underline{y} , \underline{a}_1 et \underline{u}_1 et les éléments de la matrice X_1 .

3) Donner la formule de calcul qui permet d'obtenir $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\beta}_1$ les estimations des MCO des paramètres α_1 et β_1 . Calculer numériquement $\hat{\alpha}_1$ et $\hat{\beta}_1$.

4) Donner la somme des carrés des résidus de ce modèle, notée SCR_1 . Donner le R^2 de cet ajustement.

5) Donner le texte de la PROC REG qui permet, sous SAS, d'ajuster le modèle (1).

6) On ajuste le modèle suivant :

$$(2) \quad y_{it} = \alpha_2 x_{it} + \beta_{2i} + u_{2it} \quad i = 1, 2; t = 1, 2.$$

Mettre le modèle sous la forme matricielle $\underline{y} = X_2 \underline{a}_2 + \underline{u}_2$ en détaillant les éléments des vecteurs \underline{y} , \underline{a}_2 et \underline{u}_2 et les éléments de la matrice X_2 .

7) Donner la formule de calcul qui permet d'obtenir $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_{21}$ et $\hat{\beta}_{22}$ les estimations des MCO des paramètres α_2 , β_{21} et β_{22} . Calculer numériquement $\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_{21}$ et $\hat{\beta}_{22}$.

8) Donner la somme des carrés des résidus de ce modèle, notée SCR_2 . La proposition suivante $SCR_2 \leq SCR_1$ est-elle théoriquement vérifiée? Donner le R^2 de cet ajustement.

9) Donner le texte de l'étape DATA qui permet, sous SAS, d'engendrer les variables indicatrices du modèle (2). Donner le texte de la PROC REG qui permet, sous SAS, d'ajuster le modèle (2).

2 Produit de Kronecker

1) Donner le résultat du calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2) Donner le résultat du calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3) Donner le résultat du calcul suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4) Dans le formulaire, il est dit :

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Démontrer cette proposition.

5) Quand on fait l'hypothèse d'erreurs composées, on montre, si les observations sont rangées par individu, que la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire \underline{u} est de la forme suivante :

$$V(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma & 0_T & \cdots & 0_T \\ 0_T & \Sigma & \cdots & 0_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_T & 0_T & \cdots & \Sigma \end{pmatrix} = I_N \otimes \Sigma$$

où Σ , de taille $T \times T$, est de la forme

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\mu^2 & \sigma_\mu^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 \end{pmatrix}$$

Quelle est la forme de la matrice de variance-covariance quand les observations sont rangées par période?