UNIVERSITÉ PARIS-XII — FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION
Licence *Économie et Gestion* — Mentions *Sciences économiques* et *MASS*
Cours de Micro-économie approfondie et Choix intertemporels 2005–06
François LEGENDRE `F.Legendre@univ-paris12.fr`

Document de cours n°6

Ce document cherche simplement à reprendre les points les plus difficiles du cours relatifs à la théorie de la demande ; il ne constitue pas à proprement parler un « polycopié ».

1 – Rappels sur les dérivées

On peut consulter *Les mathématiques de la micro-économie* de B. GUERRIEN et I. THIS, 1998, Economica, pour une présentation beaucoup plus détaillée.

***1.1 –* Dérivée d'une fonction composée** Soit une fonction $g(\cdot)$ définie au point x et une fonction $f(\cdot)$ définie au point $g(x)$. La fonction qui associe au nombre x le nombre $f(g(x))$ est, par définition, la fonction composée de $f(\cdot)$ et de $g(\cdot)$. Elle est notée soit $(f \circ g)(\cdot)$ soit $f(g(\cdot))$. Si $g(\cdot)$ est dérivable au point x et $f(\cdot)$ est dérivable au point $g(x)$, alors $f(g(\cdot))$ est dérivable au point x et sa dérivée est de la forme suivante :

$$[f(g(x))]' = g'(x) \times f'(g(x))$$

Cette proposition se démontre à partir du théorème des accroissements finis.

Par exemple, la dérivée de la fonction $h(x) = (x^2+2)^2$ peut être obtenue soit en développant le terme quadratique :

$$h'(x) = [x^4 + 4x^2 + 2]' = 4x^3 + 8x$$

soit en remarquant que la fonction $h(\cdot)$ est la fonction composée de $g(x) = x^2+2$ et $f(u) = u^2$:

$$h'(x) = g'(x) \times f'(g(x)) = 2x \times 2(x^2+2) = 4x^3 + 8x$$

***1.2 –* Dérivées d'une fonction de plusieurs variables** Soit une fonction de deux variables $f(\cdot,\cdot)$. On appelle *dérivée partielle* de $f(\cdot,\cdot)$ par rapport à son premier argument au point (x, y) la dérivée de la fonction $f(\cdot, y)$. Cette dérivée est notée soit $f_1'(x, y)$ soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. J'utilise de préférence la seconde notation. La définition se généralise pour le second argument et pour les fonctions de trois, quatre, … variables.

***1.3 –* Dérivées d'une fonction de plusieurs variables composée** Soient les fonctions $g(\cdot)$ et $h(\cdot)$ dérivables au point x et soit une fonction de deux variables $f(\cdot,\cdot)$ dérivable au point $(g(x), h(x))$. La fonction composée $\ell(\cdot) = f(g(\cdot), h(\cdot))$ est dérivable au point x et sa dérivée est de la forme suivante :

$$\ell'(x) = g'(x) \times f_1'(g(x), h(x)) + h'(x) \times f_2'(g(x), h(x))$$

Par exemple, la fonction $\ell(x) = x(2x+3)$ est la fonction composée de deux variables $f(g(\cdot), h(\cdot))$ avec $f(x, y) = x\,y$, $g(u) = u$ et $h(v) = 2v+3$. Avec la formule précédente, la dérivée est

$$\ell'(x) = 1 \times (2x+3) + 2 \times x = 4x + 3$$

***1.4 –* Elasticité** La fonction $y = f(x)$ relie une cause (le niveau de la variable x) à un effet (le niveau de la variable y). L'élasticité de la fonction $f(\cdot)$ au point x est la variation relative de l'effet rapportée à la variation relative de la cause au point x. Cette élasticité est égale à

$$f'(x)\frac{x}{f(x)}$$

Si, par exemple, l'élasticité est égale à 0,5, cela veut dire que si la cause s'accroît de 1 %, l'effet s'accroît de 0,5 %. Les fonctions log-linéaires de la forme $y = a\,x^b$ sont des relations à élasticité constante, égale à b.

***1.5 –* Application au calcul du taux marginal de substitution** On se restreint au cas où les préférences sont définies sur deux biens ; ces dernières sont alors représentées par la fonction d'utilité $u(\cdot,\cdot)$. La condition $u(x_1, x_2) = \overline{u}$ définie, implicitement, la fonction $x_2 = f(x_1)$; la courbe représentative de cette fonction est exactement la courbe d'indifférence qui passe par le panier $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ — ce panier apportant un niveau d'utilité égal à $\overline{u}$. Le taux marginal de substitution est, en valeur absolue, la pente de la tangente à la courbe d'indifférence qui passe par le panier $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$; par définition de la dérivée, le taux marginal de substitution est donc égal à la valeur absolue de $f'(\overline{x}_1)$. Il faut donc calculer la dérivée de la fonction $f(\cdot)$ et l'évaluer au point $\overline{x}_1$.

L'étape la plus importante du raisonnement est la suivante : il faut comprendre que la valeur de $u(x_1, f(x_1))$ est exactement $\overline{u}$ par définition de la fonction $f(\cdot)$. En effet, cette fonction donne la quantité du second bien, en fonction de la quantité du premier bien, qu'il faut fournir au consommateur pour qu'il puisse atteindre le niveau d'utilité $\overline{u}$. On dérive par rapport à x_1, à gauche et à droite, l'égalité suivante :

$$u(x_1, f(x_1)) = \overline{u} \quad \text{soit} \quad u_1'(x_1, x_2) + f'(x_1) \times u_2'(x_1, x_2) = 0$$

On obtient ainsi l'expression de $f'(x_1)$:

$$f'(x_1) = -\frac{u_1'(x_1, x_2)}{u_2'(x_1, x_2)}$$

On démontre ainsi que le taux marginal de substitution est égal au rapport des utilités marginales.

2 – Demandes marshalliennes

Les demandes marshalliennes sont les demandes habituelles, issues du programme du consommateur. Je me limite au cas d'un monde « à deux biens » pour faire simple. Les résultats présentés se généralisent sans difficultés au cas d'un monde « à n biens ». La plupart des résultats repose sur les hypothèses — guères réalistes — de non saturation forte des préférences et de convexité stricte des préférences.

2.1 – **Définition** On appelle *demandes marshalliennes* les solutions du programme du consommateur suivant :

$$\max_{x_1 \text{ et } x_2} \ u(x_1, x_2) \quad \text{sous la contrainte} \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq \mathrm{R}$$

Elles sont notées, respectivement,

$$m_1(p_1, p_2, \mathrm{R}) \quad \text{et} \quad m_2(p_1, p_2, \mathrm{R})$$

Les termes p_1, p_2 et R constituent les arguments des demandes marshalliennes quand bien même ceux-ci sont considérés comme donnés par le consommateur. Ce dernier est en effet « preneur de prix » parce que son environnement est celui d'un système de marchés de concurrence parfaite. Par contre, pour étudier la façon dont les marchés peuvent s'équilibrer, il est nécessaire de faire dépendre les demandes du consommateur des prix et de son revenu.

2.2 – **La condition d'arbitrage du consommateur** Sous l'hypothèse de non saturation des préférences, la contrainte budgétaire est « saturée ». Le programme du consommateur peut alors être résolu par substitution. La valeur de x_2, à partir de la contrainte budgétaire, est

$$x_2 = \frac{\mathrm{R}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Aussi le programme se réécrit-il

$$\max_{x_1} \ u(x_1, \frac{\mathrm{R}}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1)$$

La condition du premier ordre prend la forme suivante :

$$u_1'(x_1, x_2) - \frac{p_1}{p_2} u_2'(x_1, x_2) = 0$$

qui s'exprime comme suit

$$\frac{u_1'(x_1, x_2)}{p_1} = \frac{u_2'(x_1, x_2)}{p_2}$$

Le consommateur maximise son utilité en égalisant les utilités marginales en valeur : le surcroît d'utilité obtenu en consommant un euro de plus du premier bien doit être égal au surcroît d'utilité obtenu en consommant un euro de plus du second bien.

2.3 – **Biens inférieurs, normaux et de luxe** Un bien inférieur est un bien pour lequel l'élasticité de la demande par rapport au revenu est négative ; un bien normal, comprise entre 0 et 1 ; un bien de luxe, supérieure à 1.

3 – Demandes hicksiennes

Les propriétés des demandes hicksiennes peuvent être facilement reliées aux caractéristiques des préférences parce que ces demandes sont construites de sorte à neutraliser les effets de revenu.

3.1 – **Définition** On appelle *demandes hicksiennes* les solutions du programme du consommateur suivant :

$$\min_{x_1 \text{ et } x_2} \ p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{sous la contrainte} \quad u(x_1, x_2) \geq u$$

Il s'agit, pour le consommateur, de minimiser sa dépense tout en obtenant un niveau d'utilité au moins égal à u. Ce dernier terme est un nombre qui figure un niveau d'utilité particulier. Ces demandes sont notées, respectivement :

$$h_1(p_1, p_2, u) \quad \text{et} \quad h_2(p_1, p_2, u)$$

En résolvant ce programme, on obtient bien sûr la même condition d'arbitrage que précédemment. La contrainte $u(x_1, x_2) = u$ définit implicitement la fonction $x_2 = f(x_1)$; la condition du premier ordre est :

$$p_1 + p_1 f'(x_1) = 0$$

Mais — voir ci-avant — $f'(x_1) = -u_1'(x_1, x_2)/u_2'(x_1, x_2)$. On retrouve alors la condition d'arbitrage :

$$\frac{u_1'(x_1, x_2)}{p_1} = \frac{u_2'(x_1, x_2)}{p_2}$$

3.2 – La fonction de dépense La fonction de dépense, notée $d(\cdot,\cdot,\cdot)$, est définie à partir des demandes hicksiennes :

$$d(p_1,p_2,u) = p_1\,h_1(p_1,p_2,u) + p_2\,h_2(p_1,p_2,u)$$

Elle est donc égale à la dépense la plus faible que le consommateur doit consentir pour obtenir le niveau d'utilité u quand les prix sont, respectivement, p_1 et p_2.

La fonction de dépense est concave en les prix. Soit (p_1,p_2) un premier niveau des prix ; soit $(\tilde{p}_1,p_2)$ un second niveau des prix ; il faut montrer, pour $0 \le \lambda \le 1$, que

$$d(\lambda\,p_1 + (1-\lambda)\tilde{p}_1,p_2,u) \ge \lambda\,d(p_1,p_2,u) + (1-\lambda)d(\tilde{p}_1,p_2,u)$$

Soient (x_1,x_2) la solution quand les prix sont p_1 et p_2, $(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$ quand les prix sont $\tilde{p}_1$ et p_2 et, enfin, $(\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ quand les prix sont $\lambda p_1 + (1-\lambda)\tilde{p}_1$ et p_2. On a

$$p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2 \ge p_1x_1 + p_2x_2$$

sinon (x_1,x_2) ne serait pas la solution quand les prix sont p_1 et p_2. De même

$$\tilde{p}_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2 \ge \tilde{p}_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2$$

En multipliant la première inégalité par λ, la seconde par $1-\lambda$, on obtient :

$$[\lambda\,p_1 + (1-\lambda)\tilde{p}_1]\,\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2 \ge \lambda(p_1x_1 + p_2x_2) + (1-\lambda)(\tilde{p}_1\tilde{x}_1 + p_2\tilde{x}_2)$$

Cette dernière inégalité est exactement ce qu'il fallait démontrer.

La matrice hessienne des dérivées secondes de la fonction de dépense

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1\,\partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1\,\partial p_2}(p_1,p_2,u) \\ \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_2\,\partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_2\,\partial p_2}(p_1,p_2,u) \end{pmatrix}$$

est donc semi-définie négative. Quand une matrice est semi-définie négative, les termes de la diagonale principale sont négatifs ou nuls. Aussi a-t-on en particulier $\dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1\,\partial p_1}(p_1,p_2,u) \le 0$ et $\dfrac{\partial^2 d}{\partial p_2\,\partial p_2}(p_1,p_2,u) \le 0$.

3.3 – Lemme de Shephard Le lemme de SHEPHARD dispose que la dérivée de la fonction de dépense par rapport à un prix est égale à la demande hicksienne du bien correspondant ; soit, avec nos notations :

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) = h_1(p_1,p_2,u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial d}{\partial p_2}(p_1,p_2,u) = h_2(p_1,p_2,u)$$

Ce lemme nous permet notamment de montrer que les dérivées des demandes hicksiennes par rapport à leur propre prix sont négatives :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) = \frac{\partial^2 d}{\partial p_1\,\partial p_1}(p_1,p_2,u) \le 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial h_2}{\partial p_2}(p_1,p_2,u) = \frac{\partial^2 d}{\partial p_2\,\partial p_2}(p_1,p_2,u) \le 0$$

La démonstration du lemme est (relativement) simple ; il s'agit d'une application du théorème de l'enveloppe. A partir de la définition de la fonction de dépense, on a

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) = h_1(p_1,p_2,u) + p_1\,\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) + p_2\,\frac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)$$

où $\dfrac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)$ désigne la dérivée partielle de la fonction $h_1(\cdot,\cdot,\cdot)$ par rapport à son premier argument. Il faut donc montrer que les deux derniers termes sont nuls.

Les demandes hicksiennes vérifient par définition

$$u(h_1(p_1,p_2,u),h_2(p_1,p_2,u)) = u$$

En dérivant cette égalité, à droite et à gauche, par rapport à p_1, on obtient :

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)\,u_1'(x_1,x_2) + \frac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)\,u_2'(x_1,x_2) = 0$$

La condition d'arbitrage dispose que

$$\frac{u_1'(x_1,x_2)}{p_1} = \frac{u_2'(x_1,x_2)}{p_2} \quad \text{soit} \quad p_1 = \mu\,u_1'(x_1,x_2) \;\text{ et }\; p_2 = \mu\,u_2'(x_1,x_2)$$

où μ est un terme positif. L'expression $p_1\,\dfrac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) + p_2\,\dfrac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)$ peut donc être transformée comme suit :

$$\mu[\frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)\,u_1'(x_1,x_2) + \frac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)\,u_2'(x_1,x_2)] = \mu \times 0 = 0$$

3.4 – Equations de Slutsky Les équations de SLUTSKY permettent de relier les dérivées des demandes marshalliennes par rapport à un prix à la dérivée des demandes hicksiennes par rapport à ce prix et à la dérivée des demandes marshalliennes par rapport au revenu. Avec nos notations, ces équations prennent la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial m_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,\mathrm{R}) = \dfrac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) - h_1(p_1,p_2,u)\,\dfrac{\partial m_1}{\partial \mathrm{R}}(p_1,p_2,\mathrm{R}) \\
\dfrac{\partial m_1}{\partial p_2}(p_1,p_2,\mathrm{R}) = \dfrac{\partial h_1}{\partial p_2}(p_1,p_2,u) - h_2(p_1,p_2,u)\,\dfrac{\partial m_1}{\partial \mathrm{R}}(p_1,p_2,\mathrm{R}) \\
\dfrac{\partial m_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,\mathrm{R}) = \dfrac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) - h_1(p_1,p_2,u)\,\dfrac{\partial m_2}{\partial \mathrm{R}}(p_1,p_2,\mathrm{R}) \\
\dfrac{\partial m_2}{\partial p_2}(p_1,p_2,\mathrm{R}) = \dfrac{\partial h_2}{\partial p_2}(p_1,p_2,u) - h_2(p_1,p_2,u)\,\dfrac{\partial m_2}{\partial \mathrm{R}}(p_1,p_2,\mathrm{R})
\end{array}\right.$$

Les équations de SLUTSKY décomposent les conséquences sur les demandes marshalliennes d'une variation d'un prix en un effet de substitution — le premier terme qui correspond à la dérivée de la demande hicksienne — et en un effet de revenu — le second terme de l'expression. On voit notamment que les demandes marshalliennes ne sont pas nécessairement décroissantes par rapport à leur propre prix.

La démonstration est obtenue en mettant en correspondance les demandes marshalliennes et hicksiennes ; par exemple, pour le premier bien :

$$m_1(p_1,p_2,d(p_1,p_2,u)) = h_1(p_1,p_2,u)$$

En dérivant cette égalité par rapport à p_1, on a

$$\frac{\partial m_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,\mathrm{R}) + \frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)\,\frac{\partial m_1}{\partial \mathrm{R}}(p_1,p_2,\mathrm{R}) = \frac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u)$$

En utilisant le lemme de SHEPHARD — $\dfrac{\partial d}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) = h_1(p_1,p_2,u)$ —, on obtient bien la première des quatre équations de SLUTSKY.

En omettant les arguments des fonctions, les équations de SLUTSKY s'écrivent de façon plus compacte :

$$\frac{\partial m_i}{\partial p_j} = \frac{\partial h_i}{\partial p_j} - h_j\,\frac{\partial m_i}{\partial \mathrm{R}} \quad \forall\ i,j = 1,\dots,n$$

Ou encore, en utilisant une notation alternative :

$$m_{i'_j} = h_{i'_j} - h_j\, m_{i'_\mathrm{R}} \quad \forall\ i,j = 1,\dots,n$$

où $m_{i'_\mathrm{R}}$ désigne la dérivée de la demande marshallienne du bien i par rapport au revenu.

3.5 – **Matrice de Slutsky** La matrice de SLUTSKY regroupe les dérivées des demandes hicksiennes par rapport aux prix. Avec nos notations, la matrice de SLUTSKY s'écrit :

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial h_1}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial h_1}{\partial p_2}(p_1,p_2,u) \\
\dfrac{\partial h_2}{\partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial h_2}{\partial p_2}(p_1,p_2,u)
\end{pmatrix}$$

On peut exprimer, à l'aide des équations de SLUTSKY, cette matrice uniquement à partir des dérivées des demandes marshalliennes.

Le lemme de SHEPHARD nous permet d'interpréter cette matrice de SLUTSKY comme la matrice des dérivées secondes de la fonction de dépense :

$$\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1,p_2,u) \\
\dfrac{\partial^2 d}{\partial p_2 \partial p_1}(p_1,p_2,u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_2 \partial p_2}(p_1,p_2,u)
\end{pmatrix}$$

On en déduit ainsi que cette matrice doit être symétrique — parce que les dérivées partielles secondes ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les dérivées sont effectuées — et semi-définie négative — puisque la fonction de dépense est concave.