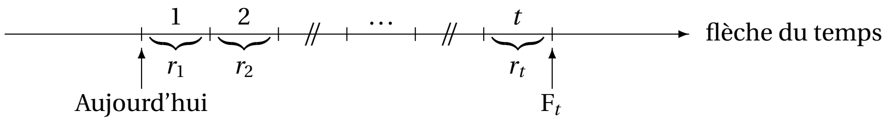
UNIVERSITÉ PARIS-XII — FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION
Licence *Économie et Gestion* — Mentions *Sciences économiques* et *MASS*
Cours de Micro-économie approfondie et Choix intertemporels 2005–06
Mihaela COSTISOR `Mihaela_Costisor@yahoo.fr`
Jean-Charles FOUROT `JCFourot@yahoo.fr`
François LEGENDRE `F.Legendre@univ-paris12.fr`

Corrigé du TD n°3

1 Exercice – Calculs simples d'actualisation

1) C'est une bonne idée de faire un échéancier pour bien repérer le calendrier des versements des flux financiers futurs. Ici, on actualise en début de période 1 ; le flux F_t est versé en fin d'année t.



La valeur actuelle de F_t est la valeur qui, investie aujourd'hui en l'actif dont le rendement est égal à r_θ pour l'année θ, serait égale à F_t. Notons V cette valeur. A la fin de la première année, son placement rapporte $(1+r_1)V$; à la fin de la deuxième, $(1+r_2)[(1+r_1)V] = (1+r_2)(1+r_1)V$ puisque le principal mais aussi les intérêts de la première année sont investis ; à la fin de l'année t, $(1+r_t)\cdots(1+r_2)(1+r_1)V$. Soit

$$F_t = \left(\prod_{\theta=1}^{t}(1+r_\theta)\right)V$$

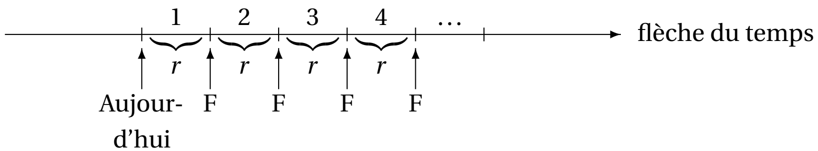
La valeur actuelle V de F_t est donc égale à

$$V = \left(\prod_{\theta=1}^{t}\frac{1}{1+r_\theta}\right)F_t$$

Quand le taux de rendement r_θ est constant, c'est-à-dire quand $r_\theta = r \ \forall\ \theta$, la formule devient

$$V = \frac{1}{(1+r)^t}F_t$$

2) Pour cet actif (une rente perpétuelle qui prévoit le versement d'un montant fixe chaque année noté F), l'échéancier est de la forme suivante :



La valeur actuelle de cette rente est donc la somme actualisée des versements que celle-ci prévoit. Soit

$$V = \frac{1}{(1+r)}F + \frac{1}{(1+r)^2}F + \frac{1}{(1+r)^3}F + \cdots = \left(\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^t}\right)F = SF$$

L'expression n'est pas très rigoureuse parce qu'il faudrait s'assurer, avant toute chose, que cette somme infinie de termes existe (c'est-à-dire converge vers une grandeur qui n'est pas indéterminée).

Il faut maintenant se rappeler de la définition d'une suite géométrique et du calcul de la somme des termes d'une telle suite. $u_1, u_2, \cdots, u_T$ est une suite géométrique si le rapport de deux termes consécutifs est constant, soit

$$\frac{u_{t+1}}{u_t} = R \quad \forall\ t$$

La grandeur R est appelée la raison de la suite géométrique. Maintenant, si je cherche à calculer la somme des N premiers termes d'une telle suite, soit

$$S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$$

je peux remarquer que RS_N est égal à

$$RS_N = u_2 + u_3 + \cdots + u_{N+1}$$

En faisant la différence de ces deux expressions, j'obtiens

$$S_N - RS_N = u_1 - u_{N+1} \quad \text{soit} \quad S_N = \frac{u_1 - u_{N+1}}{1-R} = u_1\frac{1-R^N}{1-R}$$

Il est ainsi pas trop compliqué de se rappeler l'expression des N premiers termes d'une suite géométrique.

Dans notre cas, on a

$$S = \lim_{N\to\infty} S_N = \frac{u_1 - \lim_{N\to\infty} u_{N+1}}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{\frac{1}{1+r} - 0}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{1}{1+r}\,\frac{1+r}{r} = \frac{1}{r}$$

La valeur actuelle de la rente perpétuelle est simplement égale à

$$V = \frac{F}{r}$$

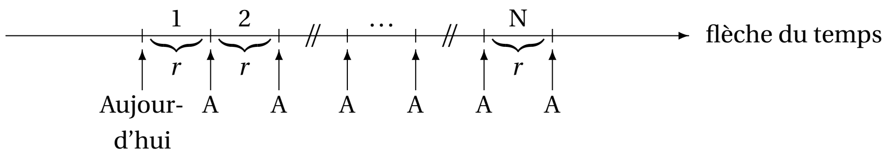
On retrouve la relation décroissante entre le prix d'un actif financier et le taux d'intérêt.

3) Pour un emprunt remboursé par annuité constante, une partie de l'annuité sert à régler les intérêts et l'autre partie à rembourser une fraction du capital dû. Supposons que le montant de l'emprunt soit de 100, que le taux d'intérêt soit de 5 % et que l'annuité soit égale à 10. Le tableau d'amortissement de l'emprunt se présente comme suit, pour les trois premières années :

Année	**1**	**2**	**3**	$\cdots$
Capital restant dû	100	95	89,75	$\cdots$
Charges d'intérêt	5	4,75	4,4875	$\cdots$
Remboursement du capital	5	5,25	5,5125	$\cdots$
Montant de l'annuité	10	10	10	$\cdots$

Au fur et à mesure, les charges d'intérêt diminuent (puisque le capital restant dû s'amenuise) et la partie de l'annuité consacrée au remboursement du capital s'accroît.

On pourrait écrire la relation entre ces différentes grandeurs pour chaque année. Il est cependant beaucoup plus simple de figurer l'échéancier de cet emprunt :



Et de remarquer que le capital emprunté est égal à la somme actualisée des annuités.

Soit, en notant K le capital emprunté :

$$K = \frac{1}{(1+r)}A + \frac{1}{(1+r)^2}A + \cdots + \frac{1}{(1+r)^N}A = \left(\sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+r)^t} \right) A = SA$$

Comme on le voit, le capital emprunté et l'annuité entretiennent une relation de proportionnalité : pour emprunter deux fois plus, l'annuité est deux fois plus élevée (à taux d'intérêt inchangé). Le terme S est la somme des N premiers termes d'une suite géométrique :

$$S = \frac{\frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^{N+1}}}{1 - \frac{1}{1+r}} = \frac{(1+r)^N - 1}{(1+r)^{N+1}} \frac{1+r}{r} = \frac{(1+r)^N - 1}{(1+r)^N} \frac{1}{r} = \frac{1-(1+r)^{-N}}{r}$$

L'annuité est ainsi égale, pour un euro emprunté (c'est-à-dire si $K = 1$) :

$$A = \frac{1}{S} = \frac{r}{1-(1+r)^{-N}}$$

TAB. 1 – Annuité constante pour 1 euro emprunté en fonction du taux d'intérêt et de la durée de l'emprunt

	Taux d'intérêt annuel			
Durée	**4 %**	**6 %**	**8 %**	**10 %**
10 ans	0,12	0,14	0,15	0,16
15 ans	0,09	0,10	0,12	0,13
20 ans	0,07	0,09	0,10	0,12
25 ans	0,06	0,08	0,09	0,11

Pour retracer les conditions des emprunts immobiliers, on prend $N = 10$, 15, 20 et 25 ; pour le taux d'intérêt, on prend $r = 4\,\%$, 6 %, 8 % et 10 %. Actuellement, pour un emprunt « non administré » (c'est-à-dire ne résultant de droits ouverts, par exemple, par un plan d'épargne logement), les taux sont de l'ordre de 6 %. Pour autant, ils étaient beaucoup plus élevés au cours des années 1990. Les calculs sont portés dans le tableau 1.

Il faut comprendre ce tableau de la manière suivante. Emprunter un euro sur dix ans au taux de 4 % engendre une annuité de 12 centimes d'euro (par an, soit 1 centime par mois). Les deux constats suivants émergent de ce tableau. D'une part, l'annuité décroît quand la durée de l'emprunt augmente mais le gain, au delà de 20 ans, est faible. Ceci explique que la durée des prêts immobiliers est souvent au maximum de 20 ans à la fois parce que les banques hésitent à prêter sur des périodes plus longues mais aussi parce que les avantages que retireraient les emprunteurs d'une plus grande durée sont limités. D'autre part, l'annuité est assez sensible au taux d'intérêt. Comme les banques, par ailleurs, exigent de leurs clients qu'ils satisfassent une norme de solvabilité (par exemple, l'annuité ne doit pas dépasser le tiers de leurs revenus annuels), il apparaît qu'une hausse des taux d'intérêt exclut les familles les plus modestes de l'accession à la propriété.

La somme non actualisée des annuités se déduit sans difficulté du tableau précédent : il suffit de multiplier l'annuité par la durée de l'emprunt. On obtient ainsi le tableau suivant :

	Taux d'intérêt annuel			
Durée	**4 %**	**6 %**	**8 %**	**10 %**
10 ans	1,23	1,36	1,49	1,63
15 ans	1,35	1,54	1,75	1,97
20 ans	1,47	1,74	2,04	2,35
25 ans	1,60	1,96	2,34	2,75

Ces calculs n'ont pas grand sens économiquement : c'est un peu comme si l'on ajoutait « des choux et des carottes » puisque les versements n'interviennent pas au même moment. Ils permettent cependant de prendre la mesure des charges d'intérêt. Il apparaît, en effet, que la somme non actualisée est d'autant plus élevée que la durée de l'emprunt est grande et les taux d'intérêts sont élevés.

4) Pour trouver le rendement mensuel constant, noté ρ_t, équivalent au rendement annuel r_t il suffit de résoudre l'équation :

$$(1+\rho_t)^{12} = 1 + r_t$$

La résolution s'obtient en passant au logarithme :

$$12 \ln(1+\rho_t) = \ln(1+r_t) \quad \text{soit} \quad \ln(1+\rho_t) = \ln(1+r_t)/12$$

On a finalement :

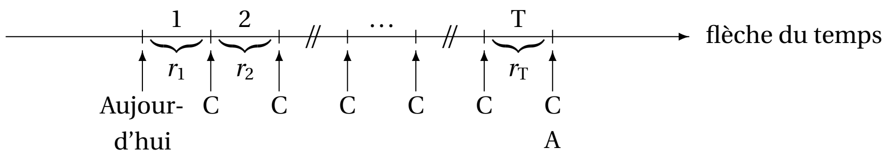
$$\rho_t = \exp(\ln(1+r_t)/12) - 1$$

Un taux annuel de 12 % correspond à un taux mensuel inférieur à 1 % puisque les taux mensuels se composent.

2 Exercice – Valorisation d'une obligation

1) Une obligation constitue la part d'un emprut émis par une grande entreprise, une banque ou, en France, par le Trésor public (on parle alors de bons d'Etat). Le détenteur d'une obligation est ainsi un créancier (ordinaire) de l'émetteur de l'emprunt obligataire. Une obligation est un actif dont les revenus sont fixes et sont exprimés en termes nominaux.

2) L'échéancier d'une obligation dont l'échéance est T et qui prévoit le versement d'un coupon C et un remboursement à l'échéance A est le suivant :



La dernière année, il y a deux flux : le coupon et le remboursement.

La valeur de l'obligation est la somme actualisée des versements que cette dernière prévoit ; soit

$$V = \frac{1}{1+r_1}C + \frac{1}{(1+r_2)(1+r_1)}C + \cdots + \frac{1}{(1+r_T)\cdots(1+r_2)(1+r_1)}C + \frac{1}{(1+r_T)\cdots(1+r_2)(1+r_1)}A$$

En adoptant des notations plus formelles, l'expression devient :

$$V = \left(\sum_{t=1}^{T}\left(\prod_{\theta=1}^{t}\frac{1}{1+r_\theta}\right)\right)C + \left(\prod_{t=1}^{T}\frac{1}{1+r_t}\right)A$$

3) Si l'on suppose que $r_t = r \ \forall \ t$, la formule qui donne V se simplifie comme suit :

$$V = \left(\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{(1+r)^t}\right)C + \frac{1}{(1+r)^T}A = SC + \frac{1}{(1+r)^T}A$$

La grandeur S est la somme des T premiers termes d'une suite géométrique. Elle est égale à :

$$S = \frac{\dfrac{1}{1+r} - \dfrac{1}{(1+r)^{T+1}}}{1 - \dfrac{1}{1+r}} = \frac{(1+r)^T - 1}{(1+r)^{T+1}}\,\frac{1+r}{r} = \frac{(1+r)^T - 1}{(1+r)^T}\,\frac{1}{r} = \frac{1-(1+r)^{-T}}{r}$$

Aussi trouve-t-on le résultat suivant :

$$V = \frac{1-(1+r)^{-T}}{r}C + \frac{1}{(1+r)^T}A$$

Le tableau demandé est le suivant :

	Taux d'intérêt			
Maturité	**4 %**	**6 %**	**8 %**	**10 %**
5	127	117	108	100
10	149	129	113	100

Les deux titres offrent un coupon égal à 10 et une valeur de remboursement égale à 100 ; au moment de leur émission, les taux d'intérêt étaient égaux à 10 %. Aussi, dans la dernière colonne du tableau pour laquelle les taux sont égaux à 10 %, la valeur des deux obligations est exactement égale à 100. Ensuite, on voit que la valeur des obligations est une fonction décroissante des taux d'intérêt. Pour autant, le cours de l'obligation dont la maturité est de 10 ans apparaît plus sensible aux variations des taux d'intérêt que l'obligation dont la maturité est de 5 ans. Ceci est un résultat général : le risque de taux est plus grand pour une obligation de maturité plus élevée. Une obligation, à l'échéance, est remboursée à une valeur fixée, connue à l'avance : le cours de l'obligation est ainsi caractérisé par un « ancrage nominal », au moment de son remboursement. Le cours d'une obligation qui serait remboursée demain ne diffère pas beaucoup de sa valeur de remboursement.

Un spéculateur détient un titre, non pour les revenus que ce dernier prévoit, mais pour les perspectives de plus values que sa vente pourrait procurer : un spéculateur achète pour revendre. Supposons que les taux d'intérêt soient égaux à 6 % et qu'un spéculateur anticipe une baisse des taux. L'obligation de maturité 5 lui apporte la plus value potentielle de 8 % ($127/117 \approx 1{,}08$) ; l'obligation de maturité 10, de 15 % ($149/129 \approx 1{,}15$). Le spéculateur va donc préférer le titre de forte maturité qui lui apporte une perspective de rendement plus élevé. Bien sûr, ce titre est plus risqué que le premier : le spéculateur, en contrepartie de la perspective de plus value, doit accepter de s'exposer au risque de taux.

4) Les deux obligations considérées sont de même échéance et de même valeur de remboursement. Pour autant, les coupons diffèrent. Ceci est possible parce que la date d'émission de ces deux obligations ne sont pas identiques. L'obligation dont le coupon est 10 a été émise alors que les taux d'intérêt étaient égaux à 10 % ; celle dont le coupon est 5 quand les taux d'intérêt étaient égaux à 5 %. Ces deux obligations n'ont donc été émises ni au même moment ni pour la même durée totale.

Le tableau demandé est le suivant :

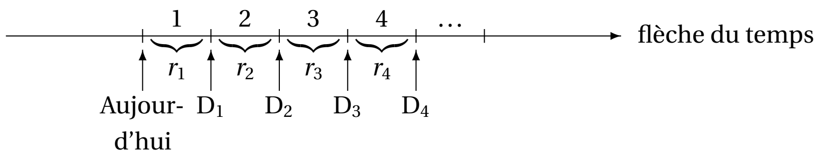
	Taux d'intérêt			
Maturité	**4 %**	**6 %**	**8 %**	**10 %**
10	149	129	113	100
5	108	93	80	69

La première ligne de ce tableau correspond à la dernière ligne du tableau précédent. Supposons que les taux d'intérêt soient égaux à 6 % et qu'un spéculateur anticipe une baisse des taux. L'obligation qui verse un coupon de 10 lui apporte la plus value potentielle de 15 % ($149/129 \approx 1{,}15$) ; celle qui verse un coupon de 5, de 16 % ($108/93 \approx 1{,}16$). Le spéculateur va donc préférer le second titre qui lui apporte une perspective de rendement plus élevé. Nous savons (cf. la question précédente) qu'un spéculateur préfère détenir une obligation d'échéance élevée ; nous savons de plus maintenant que parmi les obligations d'échéances élevées, il préfère détenir une obligation qui prévoit le versement d'un faible coupon.

3 Exercice – Valorisation d'une action

1) Une action est la part de la propriété d'une entreprise ; la détention d'une action délivre un droit de vote à l'assemblée des actionnaires et de perception des dividendes, fraction des bénéfices de l'entreprise. A la différence d'une obligation, le cours d'une action n'a pas « d'ancrage nominal » puisque son remboursement n'est *a priori* pas prévu.

2) L'échéancier d'une action est le suivant :



où D_t est le dividende de l'année t. La valeur de l'action est la somme actualisée des versements que cet actif prévoit ; soit

$$V = \frac{1}{1+r_1} D_1 + \frac{1}{(1+r_2)(1+r_1)} D_2 + \cdots + \frac{1}{(1+r_t)\cdots(1+r_2)(1+r_1)} D_t + \cdots$$

En adoptant des notations plus formelles, l'expression devient :

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\prod_{\theta=1}^{t} \frac{1}{1+r_\theta} \right) D_t$$

3) En supposant $r_t = r \ \forall\ t$, la valeur de l'action est égale à :

$$V = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} D_t$$

En supposant maintenant que $D_t = D \ \forall\ t$, la dernière expression devient :

$$V = \left(\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} \right) D = S D$$

où S est la somme infinie des termes d'une suite géométrique. Cette grandeur a été calculée précédemment (dans le premier exercice au cas d'une rente perpétuelle) ; on avait trouvé :

$$S = \frac{1}{r}$$

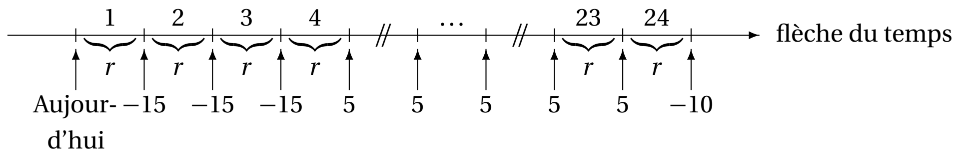
Aussi la valeur de l'action est-elle égale à :

$$V = \frac{D}{r}$$

A supposer que le dividende d'une action puisse être constant (hypothèse très peu vraisemblable), cet actif présente alors, dans ce cas, les mêmes caractéristiques qu'une rente perpétuelle.

4 Exercice – Critère du bénéfice actualisé

1) L'échéancier du projet peut être représenté comme suit :



Notons F_t le flux relatif à l'année t, positif s'il s'agit d'une recette, négatif dans le cas des coûts d'investissement et de démantèlement. Le bénéfice actualisé, en notant le taux d'actualisation ρ, est égal à :

$$\sum_{t=1}^{24} \frac{1}{(1+\rho)^t} F_t$$

Pour le calcul, il est commode de renseigner le tableau suivant :

		Flux actualisés	
t	F_t	$\rho = 6\,\%$	$\rho = 8\,\%$
1	−15	−14,15	−13,89
2	−15	−13,35	−12,86
3	−15	−12,59	−11,91
4	5	3,96	3,68
5	5	3,74	3,40
6	5	3,52	3,15
7	5	3,33	2,92
8	5	3,14	2,70
9	5	2,96	2,50
10	5	2,79	2,32
11	5	2,63	2,14
12	5	2,48	1,99
13	5	2,34	1,84
14	5	2,21	1,70
15	5	2,09	1,58
16	5	1,97	1,46
17	5	1,86	1,35
18	5	1,75	1,25
19	5	1,65	1,16
20	5	1,56	1,07
21	5	1,47	0,99
22	5	1,39	0,92
23	5	1,31	0,85
24	−10	−2,47	−1,58
Somme	45	5,59	−1,26

Avec les chiffres de ce tableau, on mesure bien l'importance de l'actualisation ; par exemple, avec un taux de 6 %, 5 euros disponibles dans 4 ans est seulement égal à 4 euros d'aujourd'hui ! Sans actualiser, le projet dégage un bénéfice de 45 ; mais en retenant un taux d'actualisation de 6 %, le bénéfice actualisé n'est plus que de 5,6 euros. Ceci s'explique par le profil des bénéfices et des charges : hormis le coût de démantèlement, les charges interviennent d'abord ; les bénéfices ensuite. Aussi les charges sont-elles peu dévalorisées par l'actualisation. Par contre, les bénéfices sont plus fortement dévalorisés par l'actualisation.

En retenant un taux d'actualisation de 8 %, le bénéfice actualisé devient négatif : le projet n'est pas rentable pour ce taux.

2) Un taux d'actualisation élevé décourage les projets lourds, qui nécessitent des équipements importants prenant du temps à installer, par rapport aux projets légers. EDF peut donc utiliser un taux d'actualisation pas trop élevé pour favoriser ce projet. D'un autre côté, si le taux d'actualisation est inférieur aux taux d'intérêt auxquels EDF s'endette pour financer la construction de la centrale nucléaire, EDF sera déficitaire. Enfin, un taux d'actualisation très faible relève, en termes relatifs, le coût du démantèlement de la centrale. Si, par exemple, on demande à EDF de prendre en compte les coûts du stockage des déchets radio-actifs, il n'est pas dans l'intérêt de cette société d'utiliser un taux d'actualisation trop faible.