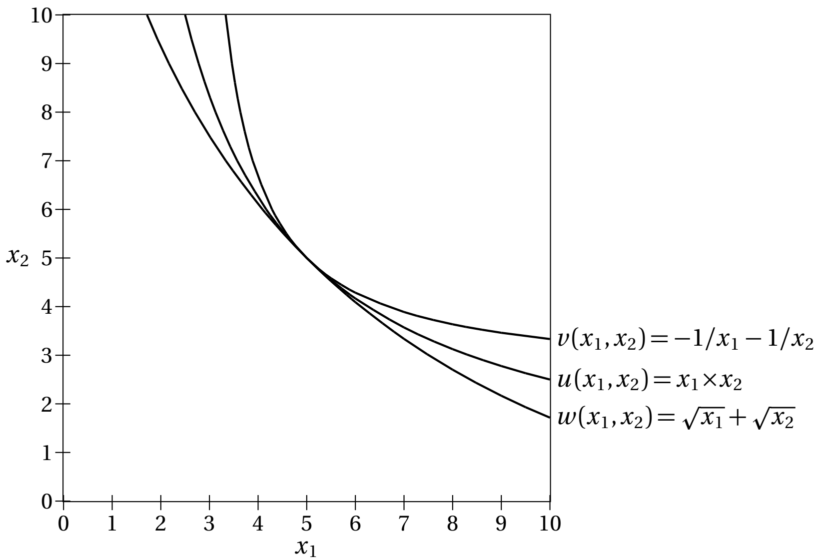
UNIVERSITÉ PARIS-XII — FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION
Licence *Économie et Gestion* — Mentions *Sciences économiques* et *MASS*
Cours de Micro-économie approfondie et Choix intertemporels 2005–06
Mihaela COSTISOR Mihaela_Costisor@yahoo.fr
Jean-Charles FOUROT JCFourot@yahoo.fr
François LEGENDRE F.Legendre@univ-paris12.fr

Corrigé du TD n°2

1 Exercice – Effets de substitution et de revenu dans le cas COBB-DOUGLAS

FIG. 1 – Les courbes d'indifférence de la question **1** des excercices **1**, **2** et **3**



1) On reconnaît la fonction d'utilité de type COBB-DOUGLAS pour laquelle les deux biens contribuent pareillement à l'utilité du consommateur. La courbe d'indifférence est donc symétrique par rapport à la diagonale principale. Elle est convexe (la relation de préférence vérifie l'hypothèse de convexité stricte) ; elle ne coupe ni l'axe des atextscisses ni l'axe des ordonnées (les deux biens sont nécessaires). Pour tracer la courbe d'indifférence, il faut tout d'abord calculer le niveau d'utilité apporté par le panier $(5,5)$. Ici, on a

$$\overline{u} = 5 \times 5 = 25$$

Il faut ensuite trouver la fonction $f(.)$ définie implicitement par la condition suivante :

$$u(x_1,x_2) = x_1 \times x_2 = 25 \quad \text{soit} \quad x_2 = \frac{x_1}{25}$$

Enfin, il faut tracer le graphe de la fonction. La courbe est représentée sur la figure 1. Pour gagner de la place, j'ai aussi porté les courbes des exercices **2** et **3**. Cela peut toutefois induire en erreur parce que l'on pourrait confondre ce graphique avec une carte des courbes d'indifférence établie pour un individu particulier. Ici, on porte des courbes d'indifférence d'individus qui ne sont pas dotés de la même relation de préférence.

2) Il est demandé une résolution numérique. Comme l'hypothèse de convexité stricte est vérifiée et que les deux biens sont nécessaires, je peux d'emblée exclure une solution « en coin ». Le panier solution est caractérisé par le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \text{le } \mathit{TMS} \text{ est égal au rapport des prix ;} \\ \text{la contrainte budgétaire est saturée.} \end{cases}$$

Soit, pour la première équation

$$\mathit{TMS} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{soit} \quad x_2 = x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire (qui est saturée)

$$10\,x_1 + 10\,x_1 = 100 \quad \text{soit} \quad x_1^\star = \frac{100}{20} = 5$$

Par symétrie, on en déduit bien sûr que $x_2^\star = 5$.

Le niveau d'utilité atteint par le consommateur, noté $u^\star$, est égal à $x_1^\star \times x_2^\star = 5 \times 5 = 25$. Il est tout à fait possible de porter cette solution sur le graphique précédent (la question est même un peu stupide puisque la courbe d'indifférence est la courbe qui passe par le panier $(5,5)$ et ce panier est le panier solution du programme du consommateur).

3) Le prix du premier bien diminue. Cette baisse a deux conséquences. D'un côté, une modification des prix relatifs : p_1/p_2 diminue. De l'autre côté, une variation du pouvoir d'achat du revenu du consommateur : ce pouvoir d'achat augmente. La première conséquence est un effet de substitution qui, dans ce cas, va conduire le consommateur à vouloir consommer plus du premier bien et moins du second bien. L'ampleur de cet effet est conditionnée par les possibilités de substitution entre les deux biens. La seconde conséquence est un effet de revenu qui, dans ce cas, va conduire le consommateur à vouloir consommer plus des deux biens (si les biens ne sont pas inférieurs). L'ampleur de cet effet est conditionnée par le coefficient budgétaire du premier bien. En effet, l'augmentation du pouvoir d'achat est en proportion de ce coefficient budgétaire. Si le consommateur, précédemment, ne consomme pas du premier bien, la baisse du prix de celui-ci ne se traduit pas pour lui par une augmentation du pouvoir d'achat de son revenu. Au contraire, s'il consomme énormément du premier bien, l'augmentation du pouvoir d'achat sera particulièrement forte.

Pour le premier bien, l'effet total est indubitablement positif. L'effet de substitution dit que la demande augmente ; l'effet de revenu dit, lui aussi, que la demande augmente. Au total, la demande du premier bien est une fonction décroissante du prix du premier bien ; aussi la loi de la demande est-elle vérifiée. En revanche, pour le second bien, il y a une lutte entre les deux effets : l'effet de substitution prévoit une baisse de la demande du second bien alors que l'effet de revenu prévoit une hausse de la demande. L'effet au total est indéterminé : si la demande du second bien est une fonction croissante du prix du premier bien (c'est-à-dire que l'élasticité prix croisée est positive), on en conclut que l'effet de substitution domine ; en revanche, si la demande est une fonction décroissante, on en conclut que l'effet de revenu domine.

La résolution du programme du consommateur s'effectue comme dans la question précédente. Soit

$$TMS = \frac{x_2}{x_1} = \frac{9}{10} \quad \text{soit} \quad x_2 = \frac{9}{10} x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire (avec le nouveau prix pour le premier bien) :

$$9\,x_1 + 10\frac{9}{10}x_1 = 100 \quad \text{soit} \quad x_1^{\star\star} = \frac{100}{18} \approx 5{,}56$$

On trouve pour $x_2^{\star\star}$:

$$x_2^{\star\star} = \frac{9}{10}x_1^{\star\star} = \frac{9}{10}\frac{100}{18} = 5$$

A ce stade, notre étonnement est grand : la demande du second bien semble être insensible au prix du premier bien. C'est en fait que nous sommes dans un cas très particulier, engendré par la forme Cobb - Douglas de la fonction d'utilité. Il s'avère que l'effet de substitution et l'effet de revenu se compensent exactement.

4) On a vu que la baisse du prix du premier bien accroît le pouvoir d'achat du revenu du consommateur. Ceci conduit à un effet de revenu qui vient brouiller les choses. On voudrait pouvoir décomposer le passage de $X^\star$ à $X^{\star\star}$ en un effet de substitution et en un effet de revenu. Comment alors annuler l'effet de revenu ? En fournissant au consommateur le revenu qui lui permet d'acheter le panier $X^\star$ avec les nouveaux prix — soit le revenu $\widetilde{R} = 9\times 5 + 10\times 5 = 95$ —, on se donne justement le moyen d'annuler la hausse du pouvoir d'achat qui provient de la baisse du prix du premier bien. Ce revenu (virtuel) nous donne aussi une mesure de l'augmentation du pouvoir d'achat du revenu du consommateur ; cette augmentation est égale à 5 % (5 rapporté à 100 où $5 = 100 - 95$). Une autre façon de calculer cette augmentation est l'expression suivante

$$5\,\% = 0{,}5 \times 10\,\%$$

où 0,5 est le coefficient budgétaire du premier bien et 10 % la baisse (en valeur absolue) du prix du premier bien.

Les calculs sont ceux de la question précédente avec le nouveau revenu (puisque les prix sont les nouveaux prix). On a ainsi directement :

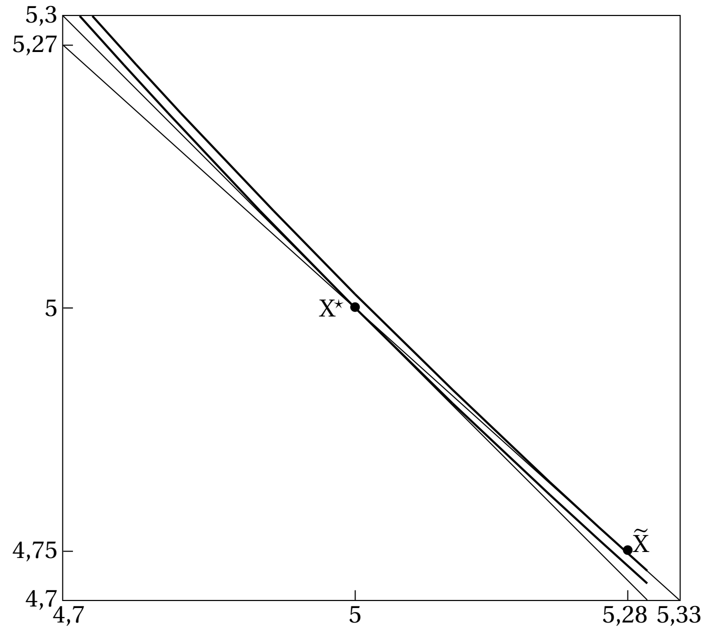
$$\widetilde{x}_1 = \frac{95}{18} \approx 5{,}28 \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_2 = \frac{9}{10}\frac{95}{18} = \frac{95}{20} = 4{,}75$$

On constate que le niveau d'utilité du consommateur, noté $\widetilde{u}$, égal à

$$\widetilde{u} = \frac{95}{18}\frac{95}{20} \approx 25{,}07$$

est légèrement supérieur à $u^\star$. En fait, en accordant un revenu de 95 au consommateur, on a été un peu trop généreux. En effet, avec ce revenu, le consommateur peut s'acheter le panier (5, 5). Pour autant, le consommateur ne va pas choisir ce panier là ; il va préférer le panier (5,28 ; 4,75). Il remplace du second bien par du premier bien à la suite de la baisse du prix du premier bien ; ce faisant, il accroît son utilité qui passe de 25 à 25,07. La figure 2 propose une représentation graphique de ce phénomène. Le graphique est réalisé à l'échelle ; il n'est ainsi pas très suggestif. La courbe d'indifférence la plus basse apporte le niveau d'utilité 25 ; la courbe d'indifférence la plus élevée le niveau d'utilité 25,07. On a porté d'une part l'ancienne droite de budget ; d'autre part, la droite de budget établie avec les nouveaux prix et avec le revenu $\widetilde{R}$. On voit que ces deux droites passent par le panier $X^\star$; par contre, seule la seconde passe par le panier $\widetilde{X}$.

Fig. 2 – $\widetilde{R}$ permet au consommateur d'accroître légèrement son utilité



On est ainsi en mesure de renseigner le tableau suivant qui décompose le passage de la situation initiale (notée « avant ») à la situation finale (notée « après ») en détaillant l'effet de substitution et l'effet de revenu.

	Avant	**Substitution**	**Revenu**	**Après**
	$X^\star$	$\widetilde{X} - X^\star$	$X^{\star\star} - \widetilde{X}$	$X^{\star\star}$
Bien 1	5	+0,28	+0,28	5,56
Bien 2	5	−0,25	+0,25	5

C'est par hasard, dans ce tableau, que l'effet de substitution est exactement égal à l'effet de revenu pour le bien 1. Par contre, pour le bien 2, l'effet de revenu compense exactement l'effet de substitution : cela vient de la forme COBB - DOUGLAS de la fonction d'utilité.

5) Nous avons vu, dans la question précédente, qu'en accordant 95 comme revenu au consommateur, on reste un peu trop généreux puisque ce dernier est en mesure, en substituant du premier bien au second bien, d'accroître son utilité. Dire que le pouvoir d'achat du consommateur est inchangé revient à dire que l'utilité du consommateur est constante. Le programme hicksien du consommateur permet justement de construire des fonctions de demande pour lesquelles le niveau d'utilité est fixé. Ce programme est un programme de minimisation de la dépense sous la contrainte d'un niveau d'utilité minimum :

$$\min_{p_1 \text{ et } p_2} p_1 x_1 + p_2 x_2 \quad \text{sous la contrainte} \quad u(x_1, x_2) \geq u$$

De ce programme, on tire les demandes hicksiennes dont les arguments sont les prix et le niveau d'utilité minimum :

$$x_1^\star = h_1(p_1, p_2, u) \quad \text{et} \quad x_2^\star = h_2(p_1, p_2, u)$$

Si le niveau d'utilité u est constant, ces demandes décrivent, quand les prix varient, un déplacement le long d'une courbe d'indifférence. Elles vont donc permettre de mettre en évidence un pur effet de substitution.

Comme, au cas de la fonction d'utilité de cet exercice, l'hypothèse de convexité stricte est vérifiée et comme les deux biens sont nécessaires, on peut exclure une solution « en coin ». La solution est donc caractérisée par le système de deux équations suivant

$$\begin{cases} \text{le } \mathit{TMS} \text{ est égal au rapport des prix;} \\ \text{la contrainte d'utilité est saturée.} \end{cases}$$

soit

$$\mathit{TMS} = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{soit} \quad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

En reportant dans la contrainte d'utilité :

$$x_1 \frac{p_1}{p_2} x_1 = u \quad \text{soit} \quad x_1^\star = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}\sqrt{u} \quad \text{et} \quad x_2^\star = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\sqrt{u}$$

On vérifie que ces deux demandes sont bien homogènes de degré 0 en les prix.

La fonction de dépense, par définition, est simplement égale à

$$d(p_1, p_2, u) = p_1 \times h_1(p_1, p_2, u) + p_2 \times h_2(p_1, p_2, u)$$

Au cas particulier, on trouve

$$d(p_1, p_2, u) = p_1 p_1^{-1/2} p_2^{1/2} u^{1/2} + p_2 p_1^{1/2} p_2^{-1/2} u^{1/2} = 2 p_1^{1/2} p_2^{1/2} u^{1/2}$$

On vérifie que cette fonction de dépense est homogène de degré 1 en les prix.

Pour vérifier que cette fonction est concave en les prix, il faut montrer que la matrice hessienne

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 d}{\partial^2 p_1}(p_1, p_2, u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1, p_2, u) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1, p_2, u) & \dfrac{\partial^2 d}{\partial^2 p_2}(p_1, p_2, u) \end{pmatrix}$$

est semi définie négative. C'est la généralisation du cas univarié où la fonction $y = f(x)$ est concave si $f''(x) \leq 0 \; \forall x$. Les calculs sont un peu pénibles. Il faut tout d'abord trouver la dérivée première de la fonction de dépense par rapport à p_1 :

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1, p_2, u) = p_1^{-1/2} p_2^{1/2} u^{1/2}$$

On vérifie que cette dérivée est égale à la demande hicksienne du premier bien :

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1, p_2, u) = h_1(p_1, p_2, u)$$

Ceci est une propriété générale qui a été démontrée en cours : c'est le lemme de SHEPHARD.

Ensuite, on trouve

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_1}(p_1, p_2, u) = -\frac{1}{2} p_1^{-3/2} p_2^{1/2} u^{1/2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1, p_2, u) = \frac{1}{2} p_1^{-1/2} p_2^{-1/2} u^{1/2}$$

Par symétrie, on peut dire que

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_2}(p_1, p_2, u) = -\frac{1}{2} p_1^{1/2} p_2^{-3/2} u^{1/2}$$

En notant $k = \frac{1}{2} p_1^{-1/2} p_2^{-1/2} u^{1/2}$, la matrice hessienne s'écrit

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} -p_1^{-1} p_2 k & k \\ k & -p_1 p_2^{-1} k \end{pmatrix}$$

Pour une matrice S de taille 2×2, il suffit de montrer, pour que S soit semi définie négative, que son élément S_{11} est négatif ou nul et que son déterminant est positif ou nul. Ici, l'élément S_{11} est égal à $-p_1^{-1} p_2 k$; il est donc négatif puisque $k > 0$. Le déterminant est égal à

$$\det = p_1^{-1} p_2 k p_1 p_2^{-1} k - k^2 = 0$$

On a ainsi vérifié que la matrice hessienne est semi définie négative.

Nous pouvons maintenant proposer une nouvelle évaluation de l'effet de substitution en utilisant les demandes hicksiennes. On va prendre

$$\widehat{x}_1 = h_1(9,10,u(5,5)) \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = h_2(9,10,u(5,5))$$

En effet, $u(5,5)$ est le niveau d'utilité dont le consommateur dispose initialement puisque $x_1^\star = 5$ et $x_2^\star = 5$. On utilise les nouveaux prix (9 pour le premier bien et 10 pour le second). Aussi met-on bien en évidence un « pur » effet de substitution.

Les calculs donnent :

$$\widehat{x}_1 = \sqrt{\frac{10}{9}}\sqrt{5\times 5} \approx 5{,}27 \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = \sqrt{\frac{9}{10}}\sqrt{5\times 5} \approx 4{,}74$$

Ces deux valeurs sont très légèrement inférieures à celles de la question **4** où l'on avait $\widetilde{x}_1 \approx 5{,}28$ et $\widetilde{x}_2 = 4{,}75$.

2 Exercice – Effets de substitution et de revenu pour des faibles possibilités de substitution

Dans le document de cours n°2, il est montré que la fonction d'utilité $z(\cdot,\cdot)$ de la forme suivante :

$$z(x_1,x_2) = \left(a\,x_1^{(\sigma-1)/\sigma} + b\,x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)} \quad a,b,\sigma > 0$$

est de type CES (à élasticité de substitution constante) où σ est égale à cette élasticité de substitution. La fonction d'utilité $z(\cdot,\cdot)$ peut s'écrire à partir de la fonction d'utilité proposée dans cet exercice

$$z(x_1,x_2) = (-v(x_1,x_2))^{-1}$$

avec $a = 1$, $b = 1$ et $\sigma = 1/2$. La transformation qui consiste à prendre l'opposé puis l'inverse est une transformation monotone croissante. On en déduit que les fonctions d'utilité $v(\cdot,\cdot)$ et $z(\cdot,\cdot)$ représentent la même relation de préférence. Pour cette relation de préférence, les possibilités de substitution entre les deux biens sont limitées puisque l'élasticité de substitution est égale à seulement 0,5.

1) La courbe d'indifférence est portée à la figure 1.

2) Là encore, on peut montrer que l'hypothèse de convexité stricte est vérifiée ; les deux biens ne sont pas à proprement parler nécessaires puisque la fonction d'utilité n'est pas définie si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. On va cependant supposer une solution intérieure. La résolution est alors comme précédemment ; pour le *TMS*, on trouve

$$TMS = \frac{x_1^{-2}}{x_2^{-2}} = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{soit} \quad x_2 = x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire, on obtient :

$$x_1^\star = 5 \quad \text{et} \quad x_2^\star = 5$$

Les deux biens contribuent pareillement à l'utilité du consommateur et les deux prix sont identiques : il n'y a pas de raisons que $x_1^\star$ diffère de $x_2^\star$.

Le niveau d'utilité que le consommateur obtient est égal à

$$v^\star = -\frac{1}{5} - \frac{1}{5} = -0{,}4$$

3) Le prix du premier bien diminue. En utilisant la même méthode de résolution, on a

$$TMS = \frac{x_1^{-2}}{x_2^{-2}} = \frac{9}{10} \quad \text{soit} \quad x_2 = \sqrt{\frac{9}{10}}\,x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire, on obtient

$$9\,x_1 + 10\sqrt{\frac{9}{10}}\,x_1 = 100 \quad \text{soit} \quad x_1^{\star\star} = \frac{100}{9+3\sqrt{10}} \approx 5{,}41$$

et

$$x_2^{\star\star} = \sqrt{\frac{9}{10}}\,\frac{100}{9+3\sqrt{10}} \quad \text{soit} \quad x_2^{\star\star} = \frac{100}{10+3\sqrt{10}} \approx 5{,}13$$

Ce dernier résultat est en mesure de nous induire en erreur. En effet, il apparaît que la demande du second bien est une fonction décroissante du prix du premier bien comme si les deux biens étaient complémentaires. Or, la courbe d'indifférence montre que les deux biens sont (faiblement) substituables. En fait, l'effet de revenu domine l'effet de substitution : c'est pour cela que l'on se trouve dans cette situation.

Le niveau d'utilité que le consommateur obtient est égal à

$$v^{\star\star} = -\frac{1}{x_1^{\star\star}} - \frac{1}{x_2^{\star\star}} = -\frac{9+3\sqrt{10}+10+3\sqrt{10}}{100} \approx -0{,}38$$

Ce niveau d'utilité est supérieur à $v^\star$ puisque le pouvoir d'achat du consommateur s'est accrû.

4) En ne donnnant que le revenu $\widetilde{R} = 95$ au consommateur, on annule la hausse du pouvoir d'achat du revenu du consommateur qui est consécutive à la baisse du prix du premier bien. Ce protocole permet donc de mettre en évidence seulement l'effet de substitution. Il suffit de reprendre les calculs de la question précédente avec le nouveau revenu. On obtient :

$$\widetilde{x}_1 = \frac{95}{9+3\sqrt{10}} \approx 5{,}13 \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_2 = \frac{95}{10+3\sqrt{10}} \approx 4{,}87$$

Le niveau d'utilité que le consommateur obtiendrait est égal à

$$\widetilde{v} = -\frac{1}{\widetilde{x}_1} - \frac{1}{\widetilde{x}_2} = -\frac{9+3\sqrt{10}+10+3\sqrt{10}}{95} \approx -0{,}3997$$

Il est légèrement supérieur à $v^\star$ pour la raison précédemment détaillée.

Le tableau qui récapitule les résultats est le suivant :

	Avant	Substitution	Revenu	Après
	$X^\star$	$\widetilde{X}-X^\star$	$X^{\star\star}-\widetilde{X}$	$X^{\star\star}$
Bien 1	5	+0,13	+0,28	5,41
Bien 2	5	−0,13	+0,26	5,13

En premier lieu, en comparant ces résultats avec ceux du cas COBB - DOUGLAS, on voit que l'ampleur de l'effet de substitution est, sensiblement, deux fois moindre (parce que les possibilités de substitution entre les deux biens sont maintenant plus faibles) et que l'ampleur de l'effet de revenu, par contre, est comparable. En second lieu, on voit que si la demande du second bien est décroissante par rapport au prix du premier bien, c'est bien parce que l'effet de revenu domine (et non parce que les deux biens seraient complémentaires).

5) La solution du programme hicksien est caractérisée par le système de deux équations suivant, en supposant une solution intérieure

$$\begin{cases} \text{le } TMS \text{ est égal au rapport des prix ;} \\ \text{la contrainte d'utilité est saturée.} \end{cases}$$

soit

$$TMS = \frac{x_1^{-2}}{x_2^{-2}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{soit} \quad x_2 = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}\, x_1$$

En reportant dans la contrainte d'utilité :

$$-\frac{1}{x_1} - \frac{\sqrt{p_2}/\sqrt{p_1}}{x_1} = v \quad \text{soit} \quad x_1^\star = \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\,\frac{1}{-v} \quad \text{et} \quad x_2^\star = \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_2}}\,\frac{1}{-v}$$

On vérifie que ces deux demandes sont bien homogènes de degré 0 en les prix. Les demandes sont croissantes par rapport à v. En effet, ce dernier terme apparaît au dénominateur, mais affecté d'un signe moins. Enfin, v prend toujours une valeur négative : $x_1^\star$ et$x_2^\star$ sont bien positifs.

La fonction de dépense, par définition, est simplement égale à

$$d(p_1, p_2, v) = p_1 \times h_1(p_1, p_2, v) + p_2 \times h_2(p_1, p_2, v)$$

Au cas particulier, on trouve

$$d(p_1, p_2, v) = p_1 \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\,\frac{1}{-v} + p_2 \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_2}}\,\frac{1}{-v} = \frac{(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})^2}{-v}$$

On vérifie que cette fonction de dépense est homogène de degré 1 en les prix.

Pour vérifier que cette fonction est concave en les prix, il faut calculer les termes de la matrice hessienne. La dérivée première de la fonction de dépense par rapport à p_1 est égale à la demande hicksienne du premier bien (lemme de SHEPHARD ; voir le document de cours n°6).

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1, p_2, v) = \frac{\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}\,\frac{1}{-v} = (1 + p_1^{-1/2} p_2^{1/2})\frac{1}{-v}$$

Ensuite, on trouve

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_1}(p_1, p_2, v) = -\frac{1}{2} p_1^{-3/2} p_2^{1/2} \frac{1}{-v} = -\frac{p_1^{-3/2} p_2^{1/2}}{-2v}$$

et

$$\frac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1, p_2, v) = \frac{1}{2} p_1^{-1/2} p_2^{-1/2} \frac{1}{-v} = \frac{p_1^{-1/2} p_2^{-1/2}}{-2v}$$

Par symétrie, on peut dire que

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_2}(p_1, p_2, v) = -\frac{p_1^{1/2} p_2^{-3/2}}{-2v}$$

En notant $k = p_1^{-1/2} p_2^{-1/2} / -2v$, la matrice hessienne s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} -p_1^{-1} p_2 k & k \\ k & -p_1 p_2^{-1} k \end{pmatrix}$$

Pour une matrice S de taille 2×2, il suffit de montrer, pour que S soit semi définie négative, que son élément S_{11} est négatif ou nul et que son déterminant est positif ou nul. Ici, l'élément S_{11} est égal à $-p_1^{-1} p_2 k$; il est donc négatif puisque $k > 0$. Le déterminant est égal à

$$\det = p_1^{-1} p_2 k p_1 p_2^{-1} k - k^2 = 0$$

On a ainsi vérifié que la matrice hessienne est semi définie négative.

Nous pouvons maintenant proposer une nouvelle évaluation de l'effet de substitution en utilisant les demandes hicksiennes. On va prendre

$$\widehat{x}_1 = h_1(9, 10, v(5,5)) \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = h_2(9, 10, v(5,5))$$

En effet, $v(5,5)$ est le niveau d'utilité dont le consommateur dispose initialement puisque $x_1^\star = 5$ et $x_2^\star = 5$. On utilise les nouveaux prix (9 pour le premier bien et 10 pour le second). Aussi met-on bien en évidence un « pur » effet de substitution.

Les calculs donnent :

$$\widehat{x}_1 = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{10}}{\sqrt{9}}\,\frac{1}{-(-1/5-1/5)} \approx 5{,}13 \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = \frac{\sqrt{9}+\sqrt{10}}{\sqrt{10}}\,\frac{1}{-(-1/5-1/5)} \approx 4{,}87$$

Ces deux valeurs, en retenant deux chiffres après la virgule, ne sont pas discernables de celles de la question **4** où l'on avait $\widetilde{x}_1 \approx 5{,}13$ et $\widetilde{x}_2 = 4{,}87$. Quand les possibilités de substitution sont faibles, on ne commet pas une grande erreur en prenant le revenu $\widetilde{R}$ pour évaluer l'effet de substitution.

3 Exercice – Effets de substitution et de revenu pour des fortes possibilités de substitution

Dans le document de cours n°2, il est montré que la fonction d'utilité $z(\cdot,\cdot)$ de la forme suivante :

$$z(x_1,x_2)=\left(a\,x_1^{(\sigma-1)/\sigma}+b\,x_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\sigma/(\sigma-1)}\quad a,b,\sigma>0$$

est de type CES (à élasticité de substitution constante) où σ est égale à cette élasticité de substitution. La fonction d'utilité $z(\cdot,\cdot)$ peut s'écrire à partir de la fonction d'utilité proposée dans cet exercice

$$z(x_1,x_2)=(w(x_1,x_2))^2$$

avec $a=1$, $b=1$ et $\sigma=2$. La transformation qui consiste à prendre le carré est une transformation monotone croissante. On en déduit que les fonctions d'utilité $w(\cdot,\cdot)$ et $z(\cdot,\cdot)$ représentent la même relation de préférence. Pour cette relation de préférence, les possibilités de substitution entre les deux biens sont grandes puisque l'élasticité de substitution est égale 2.

1) La courbe d'indifférence est portée à la figure 1.

2) Là encore, on peut montrer que l'hypothèse de convexité stricte est vérifiée ; les deux biens ne sont cependant pas nécessaires puisque $w(0,x_2)=\sqrt{x_2}>w(0,0)$. Il y a donc lieu de craindre une solution « en coin ». En supposant une solution intérieure, on trouve, pour le *TMS*

$$TMS=\frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}}=\frac{10}{10}=1\quad\text{soit}\quad x_2=x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire, on obtient :

$$x_1^\star=5\quad\text{et}\quad x_2^\star=5$$

Les deux biens contribuent pareillement à l'utilité du consommateur et les deux prix sont identiques : il n'y a pas de raisons que $x_1^\star$ diffère de $x_2^\star$. De plus, les deux quantités sont acceptables (parce qu'elles sont positives) — il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter quant à l'éventualité d'une solution « en coin ».

Le niveau d'utilité que le consommateur obtient est égal à

$$w^\star=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}\approx 4{,}47$$

3) Le prix du premier bien diminue. En utilisant la même méthode de résolution, on a

$$TMS=\frac{x_1^{-1/2}}{x_2^{-1/2}}=\frac{9}{10}\quad\text{soit}\quad x_2=\left(\frac{9}{10}\right)^2 x_1$$

En reportant dans la contrainte budgétaire, on obtient

$$9\,x_1+10\left(\frac{9}{10}\right)^2 x_1=100\quad\text{soit}\quad x_1^{\star\star}=\frac{100}{9+81/10}\approx 5{,}85$$

et

$$x_2^{\star\star}=\left(\frac{9}{10}\right)^2\frac{100}{9+81/10}\quad\text{soit}\quad x_2^{\star\star}=\frac{100}{10+100/9}\approx 4{,}74$$

Il apparaît que la demande du second bien est une fonction croissante du prix du premier bien : on en déduit que les deux biens sont très substituables puisque l'effet de substitution domine l'effet de revenu.

Le niveau d'utilité que le consommateur obtient est égal à

$$w^{\star\star}=\sqrt{x_1^{\star\star}}+\sqrt{x_2^{\star\star}}=\sqrt{\frac{100}{9+81/10}}+\sqrt{\frac{100}{10+100/9}}\approx 4{,}59$$

Ce niveau d'utilité est supérieur à $w^\star$ puisque le pouvoir d'achat du consommateur s'est accrû.

4) En ne donnnant que le revenu $\widetilde{\mathrm{R}}=95$ au consommateur, on annule la hausse du pouvoir d'achat du revenu du consommateur qui est consécutive à la baisse du prix du premier bien. Ce protocole permet donc de mettre en évidence seulement l'effet de substitution. Il suffit de reprendre les calculs de la question précédente avec le nouveau revenu. On obtient :

$$\widetilde{x}_1=\frac{95}{9+81/10}\approx 5{,}55\quad\text{et}\quad\widetilde{x}_2=\frac{95}{10+100/9}=4{,}5$$

Le niveau d'utilité que le consommateur obtiendrait est égal à

$$\widetilde{w}=\sqrt{\widetilde{x}_1}+\sqrt{\widetilde{x}_2}=\sqrt{\frac{95}{9+81/10}}+\sqrt{4{,}5}\approx 4{,}48$$

Il est légèrement supérieur à $w^\star$ pour la raison précédemment détaillée.

Le tableau qui récapitule les résultats est le suivant :

	Avant	**Substitution**	**Revenu**	**Après**
	$X^\star$	$\widetilde{X}-X^\star$	$X^{\star\star}-\widetilde{X}$	$X^{\star\star}$
Bien 1	5	+0,55	+0,29	5,85
Bien 2	5	−0,5	+0,24	4,74

En premier lieu, en comparant ces résultats avec ceux du cas Cobb - Douglas, on voit que l'ampleur de l'effet de substitution est, sensiblement, deux fois plus élevée (parce que les possibilités de substitution entre les deux biens sont maintenant plus grandes) et que l'ampleur de l'effet de revenu, par contre, est comparable. En second lieu, on voit, à la différence du cas précédent, que l'effet de substitution domine l'effet de revenu ; aussi la demande marshallienne du second bien est-elle croissante par rapport au prix du premier bien.

5) La solution du programme hicksien est caractérisée par le système de deux équations suivant [en retenant une solution intérieure]

$$\begin{cases} \text{le } \textit{TMS} \text{ est égal au rapport des prix ;} \\ \text{la contrainte d'utilité est saturée.} \end{cases}$$

soit

$$TMS = \frac{\frac{1}{2}x_1^{-1/2}}{\frac{1}{2}x_2^{-1/2}} = \frac{p_1}{p_2} \quad \text{soit} \quad x_2 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$$

En reportant dans la contrainte d'utilité :

$$\sqrt{x_1} + \frac{p_1}{p_2}\sqrt{x_1} = w \quad \text{soit} \quad x_1^\star = \frac{p_2^2}{(p_1+p_2)^2}w^2 \quad \text{et} \quad x_2^\star = \frac{p_1^2}{(p_1+p_2)^2}w^2$$

On vérifie que ces deux demandes sont bien homogènes de degré 0 en les prix.

La fonction de dépense, par définition, est simplement égale à

$$d(p_1,p_2,w) = p_1 \times h_1(p_1,p_2,w) + p_2 \times h_2(p_1,p_2,w)$$

Au cas particulier, on trouve

$$d(p_1,p_2,w) = p_1\frac{p_2^2}{(p_1+p_2)^2}w^2 + p_2\frac{p_1^2}{(p_1+p_2)^2}w^2 = \frac{p_1p_2}{p_1+p_2}w^2$$

On vérifie que cette fonction de dépense est homogène de degré 1 en les prix.

Pour vérifier que cette fonction est concave en les prix, il faut calculer les termes de la matrice hessienne. La dérivée première de la fonction de dépense par rapport à p_1 est égale à la demande hicksienne du premier bien (lemme de Shephard ; voir le document de cours n°6).

$$\frac{\partial d}{\partial p_1}(p_1,p_2,w) = p_2^2(p_1+p_2)^{-2}w^2$$

Ensuite, on trouve

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_1}(p_1,p_2,w) = -2p_2^2(p_1+p_2)^{-3}w^2$$

et

$$\frac{\partial^2 d}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1,p_2,w) = 2p_2(p_1+p_2)^{-2}w^2 - 2(p_1+p_2)^{-3}p_2^2 =$$

$$2p_2(p_1+p_2)^{-2}w^2\left(1 - \frac{p_2}{p_1+p_2}\right) = 2p_1p_2(p_1+p_2)^{-3}w^2$$

Par symétrie, on peut dire que

$$\frac{\partial^2 d}{\partial^2 p_2}(p_1,p_2,w) = -2p_1^2(p_1+p_2)^{-3}w^2$$

En notant $k = 2p_1p_2(p_1+p_2)^{-3}w^2$, la matrice hessienne s'écrit

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} -p_1^{-1}p_2k & k \\ k & -p_1p_2^{-1}k \end{pmatrix}$$

Pour une matrice S de taille 2×2, il suffit de montrer, pour que S soit semi définie négative, que son élément S_{11} est négatif ou nul et que son déterminant est positif ou nul. Ici, l'élément S_{11} est égal à $-p_1^{-1}p_2k$; il est donc négatif puisque $k > 0$. Le déterminant est égal à

$$\det = p_1^{-1}p_2kp_1p_2^{-1}k - k^2 = 0$$

On a ainsi vérifié que la matrice hessienne est semi définie négative.

Nous pouvons maintenant proposer une nouvelle évaluation de l'effet de substitution en utilisant les demandes hicksiennes. On va prendre

$$\widehat{x}_1 = h_1(9,10,w(5,5)) \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = h_2(9,10,w(5,5))$$

En effet, $w(5,5)$ est le niveau d'utilité dont le consommateur dispose initialement puisque $x_1^\star = 5$ et $x_2^\star = 5$. On utilise les nouveaux prix (9 pour le premier bien et 10 pour le second). Aussi met-on bien en évidence un « pur » effet de substitution.

Les calculs donnent :

$$\widehat{x}_1 = \frac{10^2}{(9+10)^2}(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2 \approx 5{,}54 \quad \text{et} \quad \widehat{x}_2 = \frac{9^2}{(9+10)^2}(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2 \approx 4{,}49$$

Ces deux valeurs sont très légèrement inférieures à celles de la question **4** où l'on avait $\widetilde{x}_1 \approx 5{,}55$ et $\widetilde{x}_2 = 4{,}5$.