UNIVERSITÉ PARIS-XII — FACULTÉ DE SCIENCES ÉCONOMIQUES ET DE GESTION
Licence *Économie et Gestion* — Mentions *Sciences économiques* et *MASS*
Cours de Micro-économie approfondie et Choix intertemporels 2005–06
*Mihaela COSTISOR* `Mihaela_Costisor@yahoo.fr`
*Jean-Charles FOUROT* `JCFourot@yahoo.fr`
*François LEGENDRE* `F.Legendre@univ-paris12.fr`

# Corrigé du TD n°1

## 1 Exercice – Carte des courbes d'indifférence

**1)** Si le premier bien apporte une désutilité au consommateur, la fonction d'utilité est décroissante en son premier argument. On peut prendre, par exemple, la fonction d'utilité suivante, de type COBB-DOUGLAS :

$$u(x_1, x_2) = x_1^{-1} x_2 = \frac{x_2}{x_1}$$

Les courbes d'indifférence, sur la figure 1, sont relatives, respectivement, au niveau d'utilité 0,5 ; 1 et 2.

FIG. 1 – Le premier bien apporte une désutilité

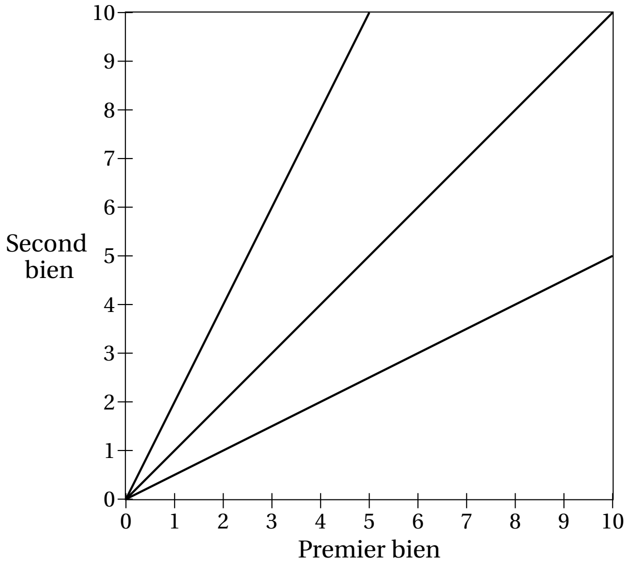
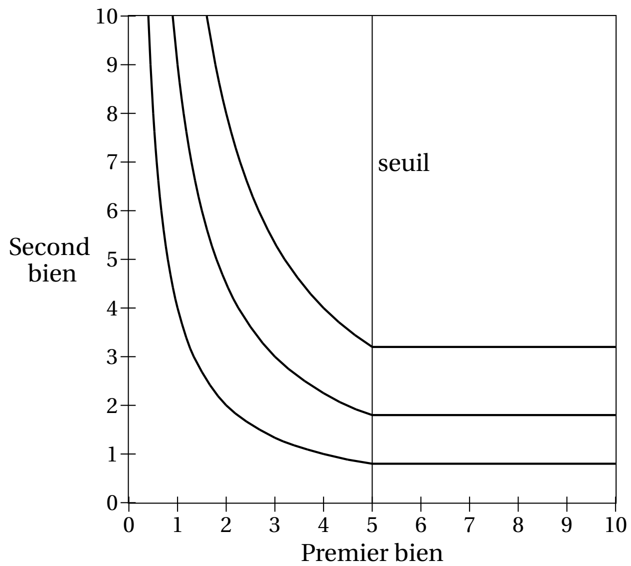



FIG. 2 – Le premier bien n'apporte plus d'utilité à partir d'un certain seuil




**2)** Si le premier bien, au-delà d'un certain seuil, ne procure plus de satisfaction supplémentaire au consommateur, cela voudrait dire, en fixant par exemple le seuil à 5, que les paniers $(5,1)$ et $(6,1)$ sont équivalents pour le consommateur ; ou encore les paniers $(5,3)$ et $(8,3)$. Pour le graphique 2, j'ai pris la fonction d'utilité suivante :

$$u(x_1, x_2) = \min(5, x_1) \times x_2$$

et j'ai porté les courbes d'indifférence pour les niveaux d'utilité 4, 9 et 16.

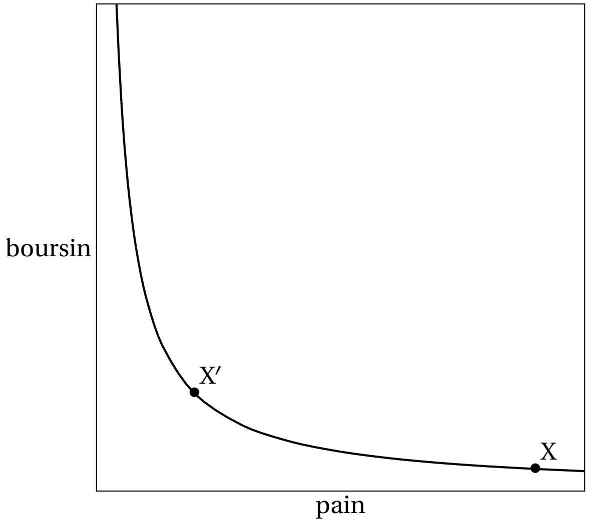
## 2 Exercice – convexité des préférences

**1)** La réponse est non. Le panier dont dispose le consommateur est situé dans la zone d'abondance relative du pain. Le consommateur, parce que ses préférences sont convexes, va attribuer une grande valeur au boursin (relativement au pain).

**2)** La réponse est oui. Le consommateur, parce qu'il préfère les mélanges, est prêt à donner une grande quantité de pain pour obtenir une faible quantité de boursin. Son panier initial est composé d'une très faible proportion de boursin. Pour ce panier, le *TMS* est très faible : il est prêt à échanger une faible quantité de boursin contre une unité de pain.

**3)** La réponse est non. Le panier initial, sur le graphique 3, est X. Quand il dispose d'une plus forte proportion de boursin, son panier pourrait être X′. L'hypothèse de convexité

FIG. 3 – Une courbe d'indifférence entre pain et boursin qui vérifie l'hypothèse de convexité stricte




stricte implique que $TMS(\mathrm{X}) < TMS(\mathrm{X}')$. En X, il est prêt à donner une plus forte quantité de pain qu'en X′ pour obtenir une unité de boursin.

## 3 Exercice – solution en coin

**1)** La relation de préférence vérifie l'hypothèse de convexité stricte si

$$\forall\ \overline{u} \text{ qui définit } f(\cdot), \quad f''(x_1) > 0 \ \ \forall\ x_1 \geq 0$$

c'est-à-dire la fonction $f(\cdot)$ est convexe. Cette fonction $f(\cdot)$ est définie (implicitement) par la condition $u(x_1, x_2) = -1/(x_1 + 0{,}5) + x_2 = \overline{u}$. Soit

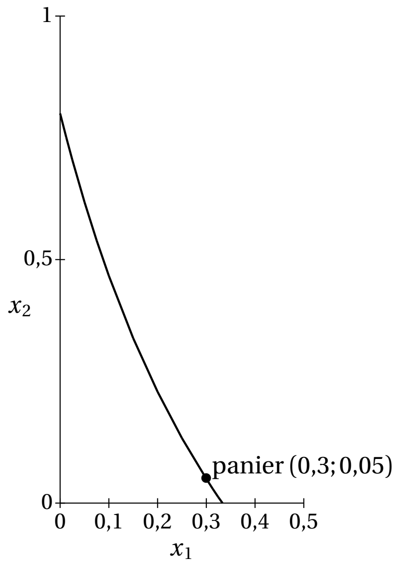
$$x_2 = f(x_1) = \overline{u} + \frac{1}{x_1 + 0{,}5} = \overline{u} + (x_1{+}0{,}5)^{-1}$$

La dérivée première de $f(\cdot)$ est $-(x_1{+}0{,}5)^{-2}$. La dérivée seconde est $2(x_1{+}0{,}5)^{-3}$. Cette dernière est strictement positive pour $x_1 \geq 0$.

**2)** Pour tracer la courbe d'indifférence du panier (0,3; 0,05), il faut tout d'abord calculer le niveau d'utilité que ce panier apporte au consommateur. $u(0{,}3; 0{,}05) = -1/(0{,}3 + 0{,}5) + 0{,}05 = -1{,}25 + 0{,}05 = -1{,}2$. Il n'y a pas à s'étonner que ce nombre soit négatif ; c'est tout à fait possible. La condition $-1/(x_1 + 0{,}5) + x_2 = -1{,}2$ définit implicitement la fonction $f(\cdot)$ :

$$x_2 = f(x_1) = -1{,}2 + \frac{1}{x_1 + 0{,}5}$$

FIG. 4 – La courbe d'indifférence de la question **2** de l'exercice **3**




dont la courbe représentative est la courbe d'indifférence recherchée (graphique 4).

**3)** Les conditions « le *TMS* est égal au rapport des prix » et « la contrainte budgétaire est saturée » s'écrivent :

$$TMS = \frac{(x_1{+}0{,}5)^{-2}}{1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{10}{10} = 1$$

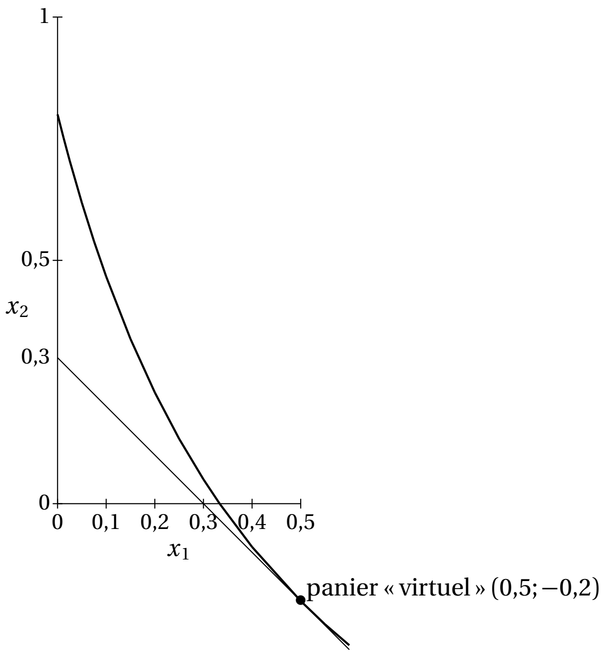
et

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 10\, x_1 + 10\, x_2 = \mathrm{R} = 3$$

La première condition permet de trouver $x_1$. En effet, $(x_1{+}0{,}5)^{-2} = 1$ donne $x_1 + 0{,}5 = 1$ ; soit $x_1^\star = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$. En reportant cette solution dans la seconde condition, on trouve $x_2^\star = (3 - 10{\times}0{,}5)/10 = -0{,}2$. Cette seconde valeur n'est pas valide : les consommations ne peuvent pas être négatives.

On remarque pourtant que le panier « virtuel » (0,5; −0,2) apporterait au consommateur un niveau d'utilité qui serait égal à $-1/(0{,}5{+}0{,}5){-}0{,}2 = -1 - 0{,}2 = -1{,}2$ ; soit le niveau d'utilité associé à la courbe d'indifférence tracée précédemment. Il faut donc élargir la définition de la courbe d'indifférence en ne la limitant pas à l'ensemble de consommation (voir la figure 5). Dans ce graphique, j'ai de plus figuré la droite budgétaire « élargie » ; on voit que la solution « virtuelle » est justement caractérisée par les deux conditions « le *TMS* est égal au rapport des prix » et « la contrainte budgétaire est saturée ». En fait, le consommateur, parce qu'il est contraint de se limiter à son ensemble de consommation, va retenir, pour maximiser son utilité, la solution en coin constituée par le panier (0,3; 0).

FIG. 5 – La courbe d'indifférence « élargie » de la question **3** de l'exercice **3**




Il ne va pas consommer du second bien parce que le pouvoir d'achat de son revenu est trop réduit et/ou parce que le prix du second bien est trop élevé par rapport au prix du premier bien. Pour le panier $(0,0)$, l'utilité marginale du premier bien est égale à 4 alors que celle du second bien est égale à 1 : on voit que le consommateur consomme, s'il est « pauvre », en priorité du premier bien (si toutefois son prix n'est pas trop élevé par rapport au prix du second bien).

**4)** Les demandes marshalliennes résultent *a priori* du programme suivant :

$$\max_{x_1 \text{ et } x_2} \quad -\frac{1}{x_1+0{,}5}+x_2 \quad \text{sous la contrainte} \quad p_1x_1+p_2x_2 \leq \mathrm{R}$$

Ce programme est toutefois incomplet ; il faut rajouter les deux contraintes suivantes :

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0$$

puisque nous venons de voir, sur un exemple, que ces contraintes pourraient ne pas être vérifiées. La méthode de résolution pertinente, dans ce cas, repose sur l'introduction de multiplicateurs de Lagrange. C'est compliqué ; je me propose de résoudre plus simplement — et moins rigoureusement — en mettant en œuvre un raisonnement économique.

La contrainte budgétaire est toujours saturée. Le plus simple est de procéder par substitution, en reportant dans la fonction objectif l'expression de $x_2$ obtenue à partir de la contrainte budgétaire :

$$\max_{x_1} \quad -\frac{1}{x_1+0{,}5}+\frac{\mathrm{R}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1$$

Pour une solution intérieure (c'est-à-dire pour une solution qui ne sature pas l'une des deux contraintes de positivité), on obtient la condition du premier ordre suivante :

$$(x_1+0{,}5)^{-2}-\frac{p_1}{p_2}=0$$

Cette dernière nous permet de trouver la valeur de $x_1$ :

$$x_1+0{,}5=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{-1/2} \quad \text{soit} \quad x_1^\star=\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}}-0{,}5$$

En revenant à l'expression de $x_2$ définie par la contrainte budgétaire, on a

$$x_2^\star=\frac{\mathrm{R}}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x_1^\star=\frac{\mathrm{R}}{p_2}-\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}}+0{,}5\frac{p_1}{p_2}$$

On peut remarquer que ces deux expressions sont bien homogènes de degré 0 en $p_1$, $p_2$ et R.

Nous avons toutefois supposé une solution intérieure ; pourtant, notamment à partir de l'exemple de la question précédente, nous avons mis en évidence que la consommation du second bien pourrait être négative quand ce niveau de consommation est calculé à partir de cette méthode. Les demandes marshalliennes prennent en fait les formes suivantes, en distinguant trois régimes.

1. **Premier régime** si $p_2 < 0{,}25\, p_1$ (c'est-à-dire si le prix du premier bien, par rapport au prix du second bien, est vraiment trop élevé)

$$x_1^\star = 0 \quad \text{et} \quad x_2^\star = \frac{R}{p_2}$$

Le consommateur va ne consommer que du second bien et se situer dans le coin Nord-Ouest.

2. **Deuxième régime** si $R < \sqrt{p_1}\sqrt{p_2} + 0{,}5\, p_1$ (c'est-à-dire si le consommateur dispose d'un faible pouvoir d'achat)

$$x_1^\star = \frac{R}{p_1} \quad \text{et} \quad x_2^\star = 0$$

Le consommateur va ne consommer que du premier bien et se situer dans le coin Sud-Est.

3. **Troisième régime** sinon

$$x_1^\star = \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{p_1}} - 0{,}5 \quad \text{et} \quad x_2^\star = \frac{R}{p_2} - \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}} + 0{,}5\frac{p_1}{p_2}$$

Le consommateur va consommer des deux biens.

## 4 Exercice – Programme du consommateur dans le cas Cobb-Douglas

**1)** La relation de préférence vérifie l'hypothèse de convexité stricte si

$$\forall\, \overline{u} \text{ qui définit } f(\cdot), \quad f''(x_1) > 0 \ \ \forall\, x_1 \geq 0$$

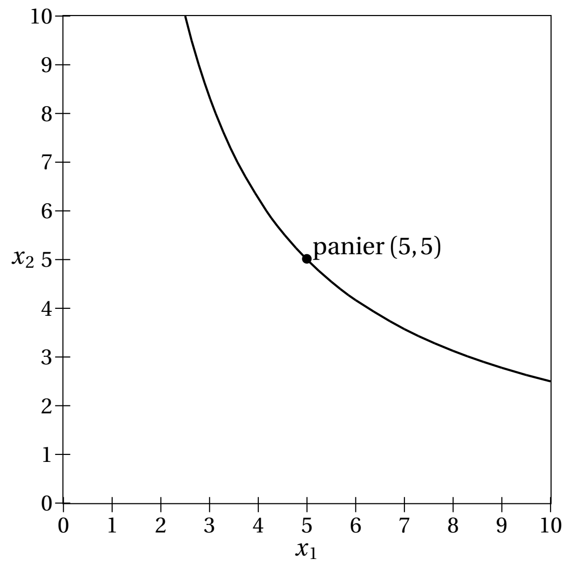
c'est-à-dire la fonction $f(\cdot)$ est convexe. Cette fonction $f(\cdot)$ est définie (implicitement) par la condition $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha} = \overline{u}$. Soit

$$x_2 = f(x_1) = \left(\frac{\overline{u}}{x_1^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \overline{u}^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

La dérivée première est égale à

$$f'(x_1) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\overline{u}^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} < 0 \quad \text{pour} \quad x_1 > 0$$

Fig. 6 – La courbe d'indifférence de la question **3** de l'exercice **4** avec $\alpha = 1/2$




Il est rassurant de constater que cette dérivée est négative : la courbe d'indifférence est décroissante puisque la fonction d'utilité est croissante en ses deux arguments. La dérivée deuxième est égale à

$$f''(x_1) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{u}^{\frac{1}{1-\alpha}} x_1^{\frac{-1}{1-\alpha}-1} > 0 \quad \text{pour} \quad x_1 > 0$$

Cette dérivée est positive : la fonction $f(\cdot)$ est bien convexe et l'hypothèse de convexité de la relation de préférence est ainsi vérifiée. Pour être vraiment rigoureux, il faut étudier, à part, le cas où $x_1 = 0$.

**2)** Le premier bien est nécessaire si $u(0, x_2) = u(0,0)$ ; c'est-à-dire si le second bien n'apporte pas d'utilité tant que l'on ne consomme pas du premier bien. Ici, on a

$$u(0, x_2) = 0^\alpha x_2^{1-\alpha} = 0 \times x_2^{1-\alpha} = 0 = u(0,0)$$

Le premier bien est donc nécessaire. Le même raisonnement s'applique pour le second bien qui est lui aussi nécessaire.

**3)** Trois étapes sont *a priori* nécessaires pour tracer la courbe d'indifférence qui passe par un panier de bien particulier. Tout d'abord, calculer le niveau d'utilité qu'apporte ce panier ; ensuite, trouver la fonction $f(\cdot)$ définie implicitement par $u(x_1, x_2) = \overline{u}$ où $\overline{u}$ est le niveau d'utilité précédemment calculé ; enfin, tracer le graphe de la fonction $f(\cdot)$.

En prenant $\alpha = 1/2$, le niveau d'utilité apporté par le panier $(5,5)$ est égal à

$$\overline{u} = \sqrt{5}\sqrt{5} = 5$$

La fonction $f(\cdot)$ est donc définie implicitement par la condition

$$\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = 5$$

soit

$$x_2 = f(x_1) = \frac{25}{x_1}$$

qui n'est définie que pour $x_1 > 0$. Pour tracer le graphe de cette fonction, l'on peut se contenter du tableau de valeurs suivant :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $x_2$ | 5 | 4,17 | 3,57 | 3,13 | 2,78 | 2,5 |

Il n'est pas nécessaire de calculer l'image de valeurs inférieures à 5 puisque la courbe d'indifférence est symétrique par rapport à la diagonale principale : il suffit de reporter les valeurs du tableau précédent en les inversant. L'on peut remarquer que $\lim_{x_1 \to 0} f(x_1) = \infty$ et que $\lim_{x_1 \to \infty} f(x_1) = 0$ : la courbe d'indifférence présente deux asymptotes, l'une verticale pour $x_1 = 0$, l'autre horizontale pour $x_2 = 0$. Aussi la courbe d'indifférence ne croise-t-elle pas les axes : les deux biens sont nécessaires. Enfin, à titre de vérification, on note que le panier $(5,5)$ figure bien sur la courbe d'indifférence. Cette dernière est portée sur la figure 6

Pour $\alpha = 1/3$, on obtient la courbe d'indifférence portée sur la figure 7 qui, à la différence de la précédente, n'est pas symétrique par rapport à la diagonale principale. Pour que le graphique soit plus suggestif, j'ai retenu un champ plus large, en faisant varier $x_1$ et $x_2$ de 0 à 20.

**4)** Nous avons montré, d'une part, que l'hypothèse de convexité stricte de la relation de préférence est vérifiée et, d'autre part, que les deux biens sont nécessaires. Aussi n'aurons nous pas de solution « en coin ». Le système de deux équations « le *TMS* est égal au rapport des prix » et « la contrainte budgétaire est saturée » caractérise la solution du problème du consommateur.

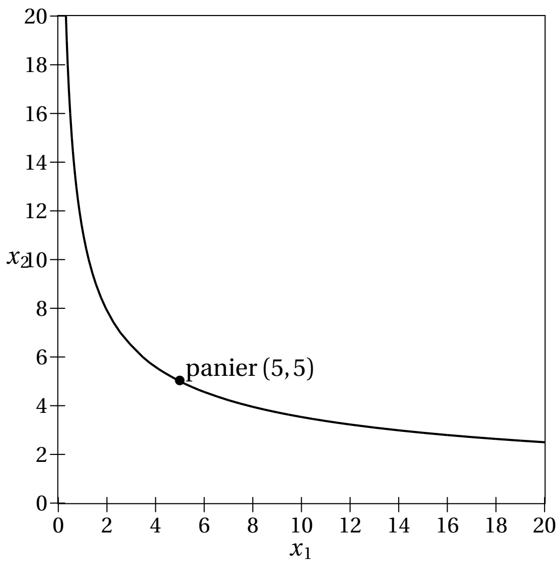
Pour résoudre, on explicite tout d'abord le *TMS* :

$$TMS = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha-1}} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_1^{-1}}{x_2^{-1}} = \frac{p_1}{p_2}$$

On en déduit l'expression de $x_2$ en fonction de $x_1$ :

$$x_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1$$

FIG. 7 – La courbe d'indifférence de la question **3** de l'exercice **4** avec $\alpha = 1/3$




On reporte enfin cette expression dans la contrainte budgétaire (qui est saturée) :

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{p_1}{p_2}x_1 = \mathrm{R}$$

soit

$$x_1^\star = \alpha\frac{\mathrm{R}}{p_1}$$

Le problème est symétrique en $x_1$ et en $x_2$ : il suffit de remplacer $\alpha$ par $1-\alpha$ et $p_1$ par $p_2$ pour obtenir la solution en $x_2$ :

$$x_2^\star = (1-\alpha)\frac{\mathrm{R}}{p_2}$$

La demande marshalienne, pour le premier bien, s'écrit sous la forme suivante :

$$x_1^\star = \alpha \mathrm{R}^1 p_1^{-1} p_2^0$$

On en déduit ainsi que les élasticités par rapport, respectivement, au revenu, au prix du premier bien et au prix du second bien sont :

$$e_{\mathrm{R}}^{x_1^\star} = 1 \quad e_{p_1}^{x_1^\star} = -1 \quad e_{p_2}^{x_1^\star} = 0$$

La forme fonctionnelle est ainsi très pauvre : le premier bien n'est ni un bien de luxe ni un bien normal ; l'élasticité prix propre est égale à $-1$ si bien que la dépense est constante que le prix varie ; enfin, l'élasticité prix croisée est nulle (voir le document 2 pour l'explication de cette « curiosité » qui tient à la forme COBB - DOUGLAS de la fonction d'utilité).

**5)** Le coefficient budgétaire du bien $i$, noté $c_i$, est égal, par définition, au rapport de la dépense consacrée à ce bien au revenu :

$$c_i = \frac{p_i x_i^\star}{\mathrm{R}}$$

Ici, on a

$$c_1 = \frac{p_1 x_1^\star}{\mathrm{R}} = \frac{p_1\,\alpha \dfrac{\mathrm{R}}{p_1}}{\mathrm{R}} = \alpha \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{p_2 x_2^\star}{\mathrm{R}} = \frac{p_2\,(1-\alpha)\dfrac{\mathrm{R}}{p_2}}{\mathrm{R}} = 1-\alpha$$

Là encore, la déception est grande puisque les coefficients budgétaires sont constants : ils devraient dépendre *a priori* des prix et du revenu. Par exemple, le coefficient budgétaire des produits alimentaires est une fonction décroissante du revenu.

**6)** La fonction d'utilité :

$$v(x_1,x_2) = (x_1+\overline{x}_1)^\alpha (x_2+\overline{x}_2)^{1-\alpha} \quad 0<\alpha<1 \ \text{ et } \ \overline{x}_1, \overline{x}_2 > 0$$

se présente comme une généralisation de la spécification précédente où sont introduits les termes $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ mais où une forme de type COBB - DOUGLAS est conservée. Ces deux termes peuvent être interprétés comme des quantités qui seraient fournies gratuitement au consommateur (ce dernier n'a pas besoin de les acheter) et qui contribueraient à l'utilité du consommateur. On voit aussi que, si par exemple $\overline{x}_1 < \overline{x}_2$, le consommateur rationnel voudra d'abord acheter seulement du premier bien puis s'il est assez riche acheter des deux biens (en supposant, bien sûr, que le paramètre α est suffisamment élevé et que le prix du premier bien n'est pas trop élevé par rapport au prix du second bien). On a ainsi l'intuition que des solutions « en coin » peuvent se présenter.

La relation de préférence vérifie l'hypothèse de convexité stricte si

$$\forall\ \overline{v} \text{ qui définit } f(\cdot), \quad f''(x_1) > 0 \ \ \forall\ x_1 \geq 0$$

c'est-à-dire la fonction $f(\cdot)$ est convexe. Cette fonction $f(\cdot)$ est définie (implicitement) par la condition $v(x_1,x_2) = (x_1+\overline{x}_1)^\alpha (x_2+\overline{x}_2)^{1-\alpha} = \overline{v}$. Soit

$$x_2 = f(x_1) = \left(\frac{\overline{v}}{(x_1+\overline{x}_1)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \overline{x}_2 = \overline{v}^{\frac{1}{1-\alpha}} (x_1+\overline{x}_1)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} - \overline{x}_2$$

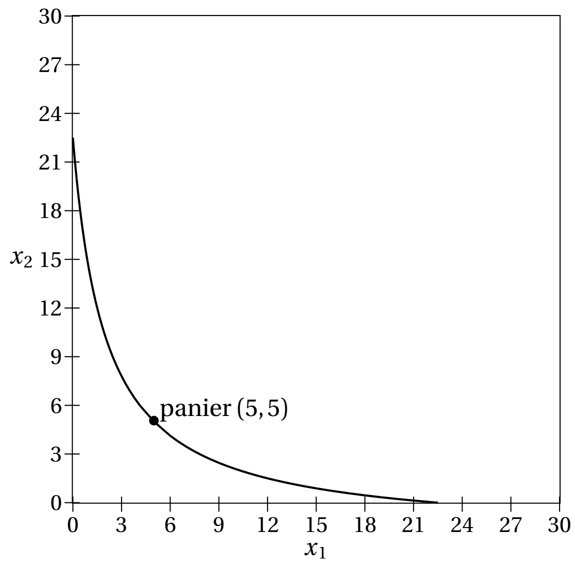
La dérivée première est égale à

$$f'(x_1) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\,\overline{v}^{\frac{1}{1-\alpha}} (x_1+\overline{x}_1)^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} < 0 \quad \text{pour} \quad x_1 \geq 0$$

Il est rassurant de constater que cette dérivée est négative : la courbe d'indifférence est décroissante puisque la fonction d'utilité est croissante en ses deux arguments. La dérivée deuxième est égale à

$$f''(x_1) = \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{\alpha}{1-\alpha}\,\overline{v}^{\frac{1}{1-\alpha}} (x_1+\overline{x}_1)^{\frac{-1}{1-\alpha}-1} > 0 \quad \text{pour} \quad x_1 \geq 0$$

FIG. 8 – La courbe d'indifférence de la question **6** de l'exercice **4** avec $\alpha = 1/2$




Cette dérivée est positive : la fonction $f(\cdot)$ est bien convexe et l'hypothèse de convexité de la relation de préférence est ainsi vérifiée.

Aucun des deux biens n'est nécessaire. En effet,

$$v(0,x_2) = \overline{x}_1^\alpha (x_2+\overline{x}_2)^{1-\alpha} > v(0,0) = \overline{x}_1^\alpha\, \overline{x}_2^{1-\alpha} \quad \text{pour} \quad x_2 > 0$$

Le second bien apporte une utilité même si le consommateur n'achète pas du premier bien.

Pour le corrigé détaillé, voir la question **3**. En prenant $\alpha = 1/2$, $\overline{x}_1 = 2$ et $\overline{x}_1 = 2$, le niveau d'utilité apporté par le panier $(5,5)$ est égal à

$$\overline{v} = \sqrt{5+2}\sqrt{5+2} = 7$$

La fonction $f(\cdot)$ est donc définie implicitement par la condition

$$\sqrt{x_1+2}\sqrt{x_2+2} = 7$$

soit

$$x_2 = f(x_1) = \frac{49}{x_1+2} - 2$$

Le graphe de cette fonction est porté sur la figure 8. On remarque que la courbe d'indifférence croise les deux axes, ce qui confirme le caractère non nécessaire des deux biens.

On peut aussi remarquer que la courbe d'indifférence est similaire à celle de la question **3** à une translation près qui correspond au changement de variables $z_1 = x_1 + \overline{x}_1$ et $z_2 = x_2 + \overline{x}_2$.

Je ne corrige pas au cas où $\alpha = 1/3$ ; on montre facilement qu'il s'agit de la courbe d'indifférence de la question **3** pour $\alpha = 1/3$, translatée vers le bas et vers la gauche de deux unités.

Pour trouver la forme générale des demandes marshaliennes, il convient d'abord de remarquer que, si l'on a montré que l'hypothèse de convexité stricte est vérifiée, l'on a aussi mis en évidence que les deux biens ne sont pas nécessaires. Il n'est donc pas possible d'exclure *a priori* la présence de solutions « en coin ». La bonne méthode de résolution serait ainsi la méthode de Lagrange. Pour autant, c'est compliqué et je préfère résoudre en supposant une solution intérieure (pour laquelle le *TMS* est égal au rapport des prix) et, dans un second temps, en vérifiant le domaine de validité de cette solution.

Le programme du consommation est ainsi

$$\max_{x_1 \text{ et } x_2} (x_1+\overline{x}_1)^{\alpha}(x_2+\overline{x}_2)^{1-\alpha}$$

sous la contrainte budgétaire

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq \mathrm{R}$$

Je peux, à gauche et à droite de cette inégalité, ajouter le terme $p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2$ ; j'obtiens la contrainte budgétaire transformée suivante :

$$p_1(x_1+\overline{x}_1) + p_2(x_2+\overline{x}_2) \leq \mathrm{R} + p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2 = \widetilde{\mathrm{R}}$$

La grandeur $\widetilde{\mathrm{R}}$ s'interprète comme le revenu du consommateur augmenté du produit de la vente de $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$. C'est donc comme si, virtuellement, le consommateur, pour se procurer un revenu supplémentaire, vendait les quantités $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$ (qui lui sont fournies gratuitement) et comme s'il devait, dans un second temps, les racheter.

L'intérêt de cette transformation est de montrer que l'on se ramène au cas habituel par le biais d'un changement de variable ; le programme du consommateur devient :

$$\max_{z_1 \text{ et } z_2} z_1^{\alpha} z_2^{1-\alpha}$$

sous la contrainte budgétaire

$$p_1z_1 + p_2z_2 \leq \widetilde{\mathrm{R}}$$

Les solutions sont donc, puisque l'on reconnaît le cas Cobb - Douglas, de la forme suivante

$$z_1^\star = \alpha\frac{\widetilde{\mathrm{R}}}{p_1} \quad \text{et} \quad z_2^\star = (1-\alpha)\frac{\widetilde{\mathrm{R}}}{p_2}$$

Comme, bien sûr, $z_1^\star = x_1^\star + \overline{x}_1$, on obtient finalement

$$x_1^\star = z_1^\star - \overline{x}_1 = \alpha\frac{\mathrm{R} + p_1\overline{x}_1 + p_2\overline{x}_2}{p_1} - \overline{x}_1 = \alpha\frac{\mathrm{R}}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha\frac{p_2}{p_1}\overline{x}_2$$

Par symétrie, on trouve

$$x_2^\star = (1-\alpha)\frac{\mathrm{R}}{p_2} + \alpha\overline{x}_2 - (1-\alpha)\frac{p_1}{p_2}\overline{x}_2$$

A titre de vérification, on peut montrer que ces demandes épuisent bien le revenu ; c'est-à-dire que $p_1x_1^\star + p_2x_2^\star = \mathrm{R}$. On peut aussi montrer qu'elles sont bien homogènes de degré 0 en $p_1$, $p_2$ et R.

Ces demandes ne sont valides que si $x_1^\star \geq 0$ et $x_2^\star \geq 0$. On obtient en définitive les trois régimes suivants

1. Si $\alpha\frac{\mathrm{R}}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha\frac{p_2}{p_1}\overline{x}_2 < 0$ (première solution « en coin »)

$$x_1^\star = 0 \quad \text{et} \quad x_2^\star = \frac{\mathrm{R}}{p_2}$$

2. Si $(1-\alpha)\frac{\mathrm{R}}{p_2} + \alpha\overline{x}_2 - (1-\alpha)\frac{p_1}{p_2}\overline{x}_2 < 0$ (seconde solution « en coin »)

$$x_1^\star = \frac{\mathrm{R}}{p_1} \quad \text{et} \quad x_2^\star = 0$$

3. Sinon [une étude plus approfondie montre que les deux conditions précédentes sont mutuellement exclusives]

$$x_1^\star = \alpha\frac{\mathrm{R}}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha\frac{p_2}{p_1}\overline{x}_2 \quad \text{et} \quad x_2^\star = (1-\alpha)\frac{\mathrm{R}}{p_2} + \alpha\overline{x}_2 - (1-\alpha)\frac{p_1}{p_2}\overline{x}_2$$

A ce stade, on est donc particulièrement satisfait puisque l'introduction d'une complication mineure dans la fonction d'utilité permet d'enrichir significativement la spécification des fonctions de demande. Les élasticités par rapport au revenu ne sont plus unitaires (l'un des deux biens est normal et l'autre « de luxe ») et les élasticités prix croisées ne sont plus nulles.

*Proposition sur le calcul d'une élasticité.* Si une grandeur positive $y$ qui dépend de $x$ peut se mettre sous la forme :

$$y = \mathrm{E} + \mathrm{F} \quad \text{avec} \quad \mathrm{E} > 0$$

où l'élasticité du terme E par rapport à $x$ est égal à $\varepsilon$ et où l'élasticité du terme F par rapport à $x$ est nulle, alors

$$|e_x^y| \leq |\varepsilon| \text{ si } \mathrm{F} \geq 0 \quad \text{et} \quad |e_x^y| > |\varepsilon| \text{ si } \mathrm{F} < 0$$

En effet, on a, par définition de l'élasticité, la décomposition suivante

$$e_x^y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}+\mathrm{F}} e_x^{\mathrm{E}} + \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{E}+\mathrm{F}} e_x^{\mathrm{F}} \quad \text{soit} \quad e_x^y = \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}+\mathrm{F}}\varepsilon$$

où le terme E/(E+F) est positif. Ce terme est inférieur à 1 si $F \geq 0$ et supérieur à 1 si $F < 0$ ; on obtient de la sorte le résultat recherché.

En appliquant cette proposition à $x_1^\star$, par rapport au revenu, le terme E est égal à $\alpha \dfrac{R}{p_1}$, $\varepsilon$ est égal à 1 et le terme F est égal à $-(1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha \dfrac{p_2}{p_1}$. On obtient ainsi :

$$e_R^{x_1^\star} \leq 1 \ \text{ si } \ -(1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha \frac{p_2}{p_1} \geq 0 \quad \text{et} \quad e_R^{x_1^\star} > 1 \ \text{ si } \ -(1-\alpha)\overline{x}_1 + \alpha \frac{p_2}{p_1} < 0$$

On voit que selon les valeurs de $\alpha$, $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $p_1$ et $p_2$, le premier bien est tantôt un bien normal tantôt un bien de luxe.

Maintenant, par rapport à $p_1$, le terme E est égal à $\dfrac{\alpha}{p_1}(R + p_2)$, $\varepsilon$ est égal à $-1$ et le terme F est égal à $-(1-\alpha)\overline{x}_1$. On en déduit que

$$e_{p_1}^{x_1^\star} < -1$$

puisque le terme F est toujours négatif. On voit que l'élasticité prix propre est donc plus élevée (en valeur absolue) que dans le cas COBB - DOUGLAS habituel.

Enfin, par rapport à $p_2$, le terme E est égal à $\alpha \dfrac{p_2}{p_1}$, $\varepsilon$ est égal à 1 et le terme F est égal à $\alpha \dfrac{R}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1$. On en déduit que

$$e_{p_2}^{x_1^\star} \leq 1 \ \text{ si } \ \alpha \frac{R}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad e_{p_2}^{x_1^\star} > 1 \ \text{ si } \ \alpha \frac{R}{p_1} - (1-\alpha)\overline{x}_1 < 0$$

A la différence du cas COBB - DOUGLAS habituel, l'élasticité prix croisée n'est donc pas nulle.

Le calcul des élasticités n'est effectué que pour $x_1^\star$. Pour $x_2^\star$, les calculs sont similaires *mutatis mutandis*. Enfin, il faudrait calculer les élasticités pour les deux solutions « en coin » ; les calculs sont immédiats.

**7)** La fonction d'utilité :

$$w(x_1, x_2) = (x_1 - \overline{x}_1)^\alpha (x_2 - \overline{x}_2)^{1-\alpha} \quad 0 < \alpha < 1 \ \text{ et } \ \overline{x}_1, \overline{x}_2 > 0$$

présente deux particularités. D'une part, elle incorpore, comme dans la question précédente, deux termes supplémentaires, $\overline{x}_1$ et $\overline{x}_2$. Mais, cette fois-ci, ces deux termes s'interprétent comme des consommations incompressibles, indispensables mais qui n'apportent pas d'utilité. D'autre part, la fonction d'utilité n'est définie que pour $x_1 \geq \overline{x}_1$ et $x_2 \geq \overline{x}_2$. L'ensemble de consommation est donc de la forme

$$\mathscr{C} = \{X \,/\, x_1 \geq \overline{x}_1 \text{ et } x_2 \geq \overline{x}_2\}$$

L'hypothèse « de survie », qui dispose que le consommateur pourrait subsister sans consommer — le panier (0,0) appartient à l'ensemble de consommation —, n'est ici pas vérifiée. Il faut notamment que le consommateur dispose d'un revenu minimum

$$\overline{R} = p_1 \overline{x}_1 + p_2 \overline{x}_2$$

qui lui permet d'acheter, au moins, le panier $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ sans lequel il ne peut survivre.

Pour le reste, le corrigé est presque identique à celui de la question précédente. La contrainte budgétaire transformée est maintenant :

$$p_1(x_1 - \overline{x}_1) + p_2(x_2 - \overline{x}_2) \leq R - p_1\overline{x}_1 - p_2\overline{x}_2 = R - \overline{R} = \widetilde{R}$$

où $\widetilde{R}$ s'interprète comme le revenu que le consommateur peut librement affecter à l'achat de l'un ou de l'autre bien (après la dépense indispensable pour acheter le panier de subsistance $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$) et où $x_1 - \overline{x}_1$ et $x_2 - \overline{x}_2$ s'interprètent comme les quantités qui contribuent réellement à la satisfaction du consommateur.